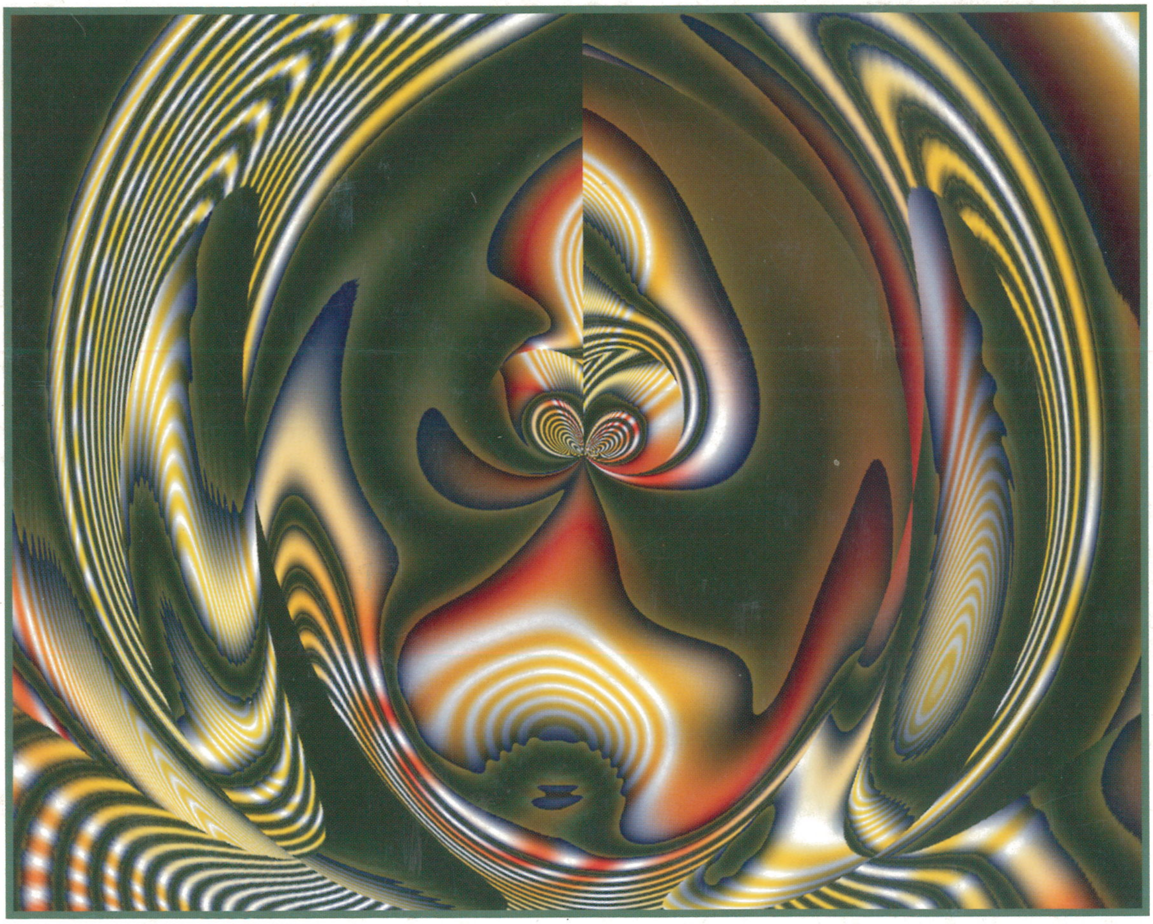
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年2月1日発行　第47巻2号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

2
2009

特集 発展する量子力学
21世紀の「量子力学的世界像」



No.548
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 548 February 2009

発展する量子力学

21世紀の「量子力学的世界像」

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，1年間（本誌＋別冊2冊）14,500円，半年間（本誌のみ）5,500円，半年間（本誌＋別冊1冊）7,250円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2006年/2 省略
2006年/3 〈強い力〉
/4 「空間」とは何か
別冊 量子の新世紀
/5 数学と物理の対話
/6 発見とひらめき
/7 重力は語る
/8 ネットワーク科学の数理
/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊 場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊 双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009年/1 グラフィックでわかる物理

数理科学臨時別冊一覧

07年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07年/12 計算神経科学への招待
08年/1 演習 くり込み群
08年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08年/5 重力理論講義
08年/6 代数幾何入門講義
08年/7 ネットワーク科学への招待
08年/9 物理のためのリー群とリー代数
08年/11 量子暗号理論の展開
09年/1 量子力学の考え方

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

February 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 548

特集／発展する量子力学

量子力学の新しい様相

筒井 泉

1. 量子力学のながれ

プランク，アインシュタイン，ボーアらによる揺籃期を経て，ハイゼンベルクが行列力学を創始し，シュレディンガーが波動方程式を提出した1920年代半ばを，現在の形の量子力学の生まれた年とするならば，既にそれから80年余りが経過したことになる．この間，量子力学は物理学のあらゆる分野の基礎となり，応用の上でも家庭電器から軍事兵器まで広い範囲で威力を発揮し，今日に至っている．

良く知られているように，量子力学は19世紀末に鮮明になった黒体輻射の問題をはじめとする一連の古典物理学の矛盾の解消には成功したものの，その一方で理論が内包する不可解さのために，生みの親たち——とりわけアインシュタインとボーア——の間に深刻な論争を惹き起こした．すなわち，量子力学は物理学という王国の内乱を収める上で，古典物理学から王位を継承するための世継ぎとしては祝福されたが，その姿や言動が予想外なものであったために，一部の重臣の間にはなお不穏な空気も漂っていたと言えるだろう．少なくともアインシュタインは，たび重なるボーアの説得にも拘らず，あくまで彼自身の満足する理想の王を探し続けていたのである．

アインシュタインの異端的な探求は，1935年にポドルスキー，ローゼンとともに書いたEPR論文[1]において，はたして量子力学が物理の理論として完全であり得るのかという疑問——後にEPRパラドックスと呼ばれる——の形で表明されている．しかしながら，新しい王の後見役であるボーアの唱導が王国全体を支配し，また王たる量子力学自身もその威力を十分に発揮したので，その後半世紀にわたり，一握りの好事家[*1]を除いて彼の異端に耳を傾ける者は殆どいなかった．今日に至っても，古典物理学と同様な意味での量子力学の綻びはまったく見えておらず，量子力学の王たる地位に揺らぎは一切ない．

それではアインシュタインの探求は，まったく空虚なものであったのだろうか．答えは否である．1964年にベルが，ベル不等式[3]の発見を通して，アインシュタインの概念的疑問を物理の検証可能な問題として掘り下げた．これがEPR論文を見直す上で一つの契機を与えたが，さらに20世紀後半の微細加工や制御技術の飛躍的な進展によって，量子力学の量子力学たる所以，すなわちその予想外の姿や言動が，次第に明瞭なかたちで表に

*1) シュレディンガーはEPR論文に衝撃を受け，有名な猫のパラドックスに言及する論文[2]を同じ1935年に提出しているが，これは量子力学における観測やマクロ限界に関する重要な問題を指摘するものとして，今日なお意義深い．

出るようになった．これらの結果，EPR論文の提示した問題を取り巻く環境も徐々に変化したが，とりわけ1990年代になって量子物理学が広がりを見せ，量子情報科学が花を開くと同時に，量子力学が示す，いわば常識的な理解を越える奇妙な様相に対しても，より深く理解したいという欲求が高まった．ここにおいて，アインシュタインがEPR論文で問題にした量子力学の根幹に，基礎と応用の両面から光があたり始めたのである．実際，EPR論文は近年，引用件数が急増し，現在ではすべての物理論文の中で最も引用される論文の一つになっている．すなわち，今のところ量子力学に代わる王を探す必要はないが，少なくとも現王がその深層にいったいどのような人格を持っているのか，そして今後どのような能力を発揮できるのかを精しく知ることは必要だ，という認識になってきたのである．

本特集号は，このような近年の発展する量子力学の一端を知るための，最前線の研究者による解説記事を集めたものである．話題は量子力学の相補性と不確定性に関するものから，量子状態の幾何学，量子もつれの数理，またこれと測定操作を組み合わせた量子系の制御や情報処理，さらにはエネルギーのテレポーテーションに関する最新の研究まで広い範囲に渡っている．もとより本特集号の記事のみによって，広い範囲で活発に展開しつつある現在の量子力学の最前線の全体像を知ることはできないが，その大きな流れの断面を見るには好適であり，また同じ量子力学の諸問題に関する本誌の別の特集号と併せて目を通せば，その理解は一層深まるだろう．

2. 本特集号記事について

さてここで本特集号の各記事を紹介しよう．まず谷村省吾氏の「干渉と識別の相補性」では，波動と粒子の2重性に関して重要になる相補性原理と不確定性関係との関連について，最近の興味深い研究の進展が解説されている．長岡浩司氏の「量子状態空間の幾何学」では，確率論の拡張体系としての量子力学が持つ情報幾何学的構造についての研究成果が述べられており，その数理的な豊かさには驚かされるだろう．杉田歩氏の「量子エンタングルメントの数理」には，量子もつれの非古典性とその不可思議な性質とともに，未解決の課題である多体系の量子もつれの定量的な評価を，群論に基づいて見通しよく行う新しい考えが提示されている．

湯浅一哉氏の「観測による量子系制御」と井元信之氏の「多体エンタングルメント情報処理」では，量子もつれを基礎として測定操作によって量子系を制御し，情報処理を行う方法がわかり易く説明されている．多体系の量子もつれの繰り返し測定に対する持続性の分析や，最近の一方向量子計算に向けた研究は，今後の量子力学の応用への重要な指針を与えるものと思われる．また堀田昌寛氏の「量子エネルギーテレポーテーション」は，量子もつれと測定によって，情報ではなくエネルギーの伝送の可能性を示唆したものであり，これを契機として，量子情報と物理学との融合領域の研究が本格化することを期待したい．

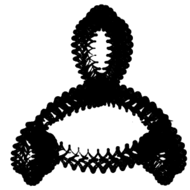
なお，以上の各記事に先立ち，これらの内容を理解する参考に，量子力学の基礎的な事項を簡単に説明し，最近の基礎研究のいくつかのトピックに触れた拙文を，後続の露払いとしてこの直後に置いた．また，本特集号では特に，古田彩氏による現代の量子力学の巨人たちについてのコラムが随所に鏤められており，記事と併せて愉んでお読み頂ければ幸いである．

参考文献

1) A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
2) E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23** (1935) 807; 823; 844.
3) J.S. Bell, *Physics* **1** (1964) 195.

（つつい・いずみ，
高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所）

量子力学のすがた



筒井　泉

1. はじめに

量子力学とはいったい何だろうか．また現在の量子力学の基礎についての研究として，どのようなことが行われているのだろうか．初めの疑問について，量子力学について正規に勉強したことのない読者にも，少なくとも後に続く記事の話の骨子が理解できる程度に，その概要を手短かに説明したい．また後者については，本特集号にいくつかの興味深い話題の解説がなされているので，それら以外から管見の及ぶ範囲で，近年の興味深い話題をひろって紹介することにしよう．

2. 量子力学とはどのようなものか

量子力学[1)]では，物理系の量子状態を長さ１のベクトルによって表すことを基本とする．ベクトルの次元は，我々（観測者）が想定する状態の情報量によって決まり，その情報の種類は自由に規定して良い．一般に物理の理論が記述する事柄は限定されたものであり，その範囲は目的によって決まる．対象が粒子系の場合は，位置や運動量による記述を考えることが多いが，これに限らず，状態を規定する情報量を長さ１のベクトルで表現することが，量子力学の出発点である．長さを１にする理由は，確率的な解釈を行うためであり，この点について後に述べることにする．

いま２つの状態に対応するベクトルを，それぞれ $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ とすれば，これらの状態がどの程度似た状態であるかは，それらのベクトルの内積の大きさ $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$ によって大雑把に測ることができる[*1)]．これが最大値１になるときが最も近い状態（つまり $|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ は同じ状態）であり，ベクトル $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ が直交して最小値０になるときは，これらの状態は“無関係”であるということができる．例えば，この原稿の執筆が進まず鬱状態にある筆者を $|\text{鬱}\rangle$ というベクトルで，また宝くじが当たって躁状態にある筆者を $|\text{躁}\rangle$ と書けば，これらの状態はかけ離れた状態だから直交したベクトルで表現できるだろう．筆者のようにマクロな系でも，もし仮に $|\text{鬱}\rangle$ と $|\text{躁}\rangle$ という状態のみに注目すればベクトルの次元は２で済むが，もし加えて満足度や疲労度など，他の多様な情報を含んだ状態を記述したければ，巨大な次元が必要になる．但し，次元の大小は以下に述べる量子状態の本質には関係しない．

さてここで最も重要なのは，ベクトルには足し合わせ操作ができるという点である．すなわち，２つの状態ベクトル $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ を足し合わせたもの

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \tag{1}$$

もまたベクトルであるから，別の状態を表してい

*1)　ベクトルは数学ではふつう $\vec{\psi}$ と書くが，量子力学では $|\psi\rangle$ と書くことが多い．それらの内積も，数学での $\vec{\psi_1}\cdot\vec{\psi_2}$ の代わりに $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ と書く．なお，ベクトルによって表される状態は純粋状態と呼ばれ，系の状態を最大限に指定したものである．そうでないものは混合状態と呼ばれ，密度演算子（作用素）と呼ばれる行列で表される．

ると考えて良い．（本来はベクトル $|\psi\rangle$ の大きさを 1 にする規格化因子が必要であるが，簡単のため以下では無視する．）これは単純なことのように見えて，実はいくつかの重大な意味を持つ．その一つは，干渉効果の発生である．一般に波動現象は重ね合わせができて，強め合う場合には波は高くなり．弱め合う場合には低くなる．これと同じことが量子状態にも起き，その結果，波動としての性質を状態が持つことになるのである．

一方，与えられたベクトルを分解して 2 つのベクトルの和で書く場合には，周知のように平行四辺形の規則によって分解すれば良いが，その分解の仕方は無限にある．例えば，(1) 式のベクトル $|\psi\rangle$ は，適当な別の状態 $|\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ を用いて

$$|\psi\rangle = |\psi_3\rangle + |\psi_4\rangle \tag{2}$$

と書き表すこともできる（図 1 参照）．このことは，もし状態 $|\psi\rangle$ が $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ のそれぞれの状態を特徴づける物理的性質を持っていると考えるならば，同時に $|\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ のそれぞれを特徴づける物理的性質をも持っていると見なせることを意味する．このように，一つの状態にカメレオンのように異なる表象を与えることができることが，量子状態の著しい特徴である．例えば，ベクトル $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ が特定の波長によって特徴づけられた状態であり，ベクトル $|\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ が特定の位置に局在する性質で特徴づけられた状態――これらの特徴づけを精確に行うためには，より多くの状態に分解する必要があるが――の場合には，各々の状態を調べる測定によって，状態 $|\psi\rangle$ に波動性と粒子性の両者の性質を観ることができる．これが**波動と粒子の二重性**が現れる所以である．

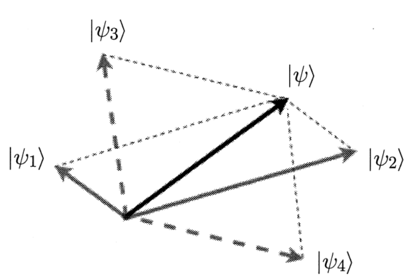


図 1　量子力学では状態はベクトル $|\psi\rangle$ で表される．ベクトルを分解する際の平行四辺形の規則によれば，状態 $|\psi\rangle$ は $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ とも $|\psi\rangle = |\psi_3\rangle + |\psi_4\rangle$ とも書き表すことができる．

対象とする物理系が 2 つの部分系に分かれている場合，各部分系の状態を規定するベクトルを括弧の外に添字をつけて $|\alpha\rangle_1$，$|\xi\rangle_2$ と区別することにし，また各部分系が同時にこれらの状態にあるときの全体の系の状態を，単に積の形に並べて $|\psi_1\rangle = |\alpha\rangle_1|\xi\rangle_2$ と書き表そう．これは全体の系の状態を表すベクトルであり，それぞれ別の状態の組からなるベクトル $|\psi_2\rangle = |\beta\rangle_1|\eta\rangle_2$ も再び全系の状態ベクトルであるから，(1) よりこれらの重ね合わせ

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle_1|\xi\rangle_2 + |\beta\rangle_1|\eta\rangle_2 \tag{3}$$

もベクトルとして全系の状態を表す．この状態に含まれる各部分系の 2 状態が直交するとき，それらの組合せの間に――系 1 が状態 $|\alpha\rangle_1$ のときには系 2 の状態は必ず $|\xi\rangle_2$，反対に系 1 が状態 $|\beta\rangle_1$ のときは系 2 の状態は必ず $|\eta\rangle_2$ という意味で――完全な相関があることになる．(3) のように，各部分系の状態の積 1 つではなく複数の状態の積の和でしか書けない状態は，**量子もつれ**（エンタングル）状態と呼ばれ，量子情報科学における中心的な概念となっている．

上の (3) 式で表される相関は，古典的な完全相関（犬が西向きゃ尾は東）と同じものに見えるかも知れない．しかし (1) と (2) で見たように，一つの量子状態は何通りにも分解できるので，量子もつれ状態の場合は，分解の仕方によって完全相関の物理的な意味も変わることになる．一般に分解の仕方はそれぞれの測定方法に対応しており，その選択は全く自由なので，これを逆手にとって測定によって測定者が系の状態に何らかの関与を行う可能性が生じるが，これが古典的な相関との決定的な違いをもたらすのである．このような測定者の自由選択可能性を基礎に，量子もつれ状態の相関が古典的な相関よりも強くなる場合があることを示したのが 1964 年の**ベル不等式**であり，これは量子力学の深層を抉るとともに，将来の応用の可能性を示唆した非常に重要な仕事である．

話を元に戻して，状態の変化と物理量の測定に

ついて述べよう．一般に系の状態は系の内部の状況や外部からの影響によって時間とともに変化するが，その時間変化は状態ベクトルの大きさを変えない（ユニタリー変換と呼ばれる）変換

$$|\psi\rangle \to U\,|\psi\rangle \qquad (4)$$

で表される．これはベクトル $|\psi\rangle$ にユニタリー行列 U を掛けたものに過ぎないが，肝心なことはこれが線形変換であることである．つまり，(1) で分解される状態 $|\psi\rangle$ に対する時間発展は，行列演算の結果 $U\,|\psi\rangle = U\,|\psi_1\rangle + U\,|\psi_2\rangle$ となり，分解された各状態が独立に時間変化したものの重ね合わせ状態が，そのまま全体の時間変化した状態となっている．このような時間発展の下での線形性は古典力学では一般に成立しないもので，量子力学の特徴である．

さて，量子力学では物理量は対応するエルミート行列 A で表され，その測定値は行列 A の固有値のどれかであるとする．この規則から，物理量の測定値は離散的になる（行列の次元が無限大のときには連続値を含む）こと，すなわち**物理量の量子化**が帰結されるが，これは 19 世紀末から 20 世紀初めに，古典物理学では説明できない実験結果を前にして要請されていたことであった．固有値の中でどの測定値が得られるかは状態 $|\psi\rangle$ に依存して決まるが，その値は一般に測定ごとに異なり，その統計平均（期待値）は A で変換した状態 $A\,|\psi\rangle$ と元の状態 $|\psi\rangle$ との内積 $\langle\psi|A\,|\psi\rangle$ で与えられる．このように，量子力学での測定結果は統計的なものであり，従って状態や物理量も本質的に**確率論的意味**を持つことになる．

与えられた状態 $|\psi\rangle$ が物理量 A をどのように持つかについては，A の特定の固有値を持つ状態，すなわち固有ベクトルの和で書き表すことによって推し量ることができる．状態の分解 (1) の仕方は，そのような視点から行うことが多く，その際の各状態の係数（の大きさの 2 乗）が，状態 $|\psi\rangle$ が各々の状態にある確率を表す．前にベクトル $|\psi\rangle$ の大きさを 1 にしたのは，この確率解釈を行うためであった．なお，何度測定しても必ず同じ測定値を得るためには，状態ベクトルは A の固有ベクトルでなければならないことは，この固有ベクトルによる状態の分解の特別な場合として理解できるだろう．

しかし 2 種類の物理量 A, B に対する測定を考える場合は，これらに共通した固有ベクトルが存在するとは限らないことに注意を要する．実際，A, B は行列であるので一般には交換せず $AB \neq BA$，その結果，測定値にはそれぞれ一定の統計的な広がり（標準偏差）$\varDelta A, \varDelta B$ が現れる．特に $AB-BA$ が単位行列 I に比例するときには，行列 A, B に共通する固有ベクトルは存在せず，その比例定数を $i\hbar$ と書けば，両者の標準偏差の積には下限が存在し，

$$\varDelta A\,\varDelta B \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (5)$$

となる．これが**不確定性関係**である*2)．なお，多くの場合，系の自由度に付随して上のような物理量の特定のペア（共役な物理量の組）が存在し，それらに対する比例定数はプランク定数 h を用いて $\hbar = h/2\pi$ で与えられる．その代表例が粒子の運動量と位置であり，これらに付随して前に述べた波動性と粒子性という性質が現れる．このように互いに相容れない性質を持つ 2 つの物理量は相補的であると言い，一方の性質を確定的に規定しようとすると，他方の性質の規定は放棄せざるを得ない．これが**相補性原理**と呼ばれているものである．

量子もつれ状態の完全相関を利用して，系の測定過程を表すことができる．例えば 1 の系を測定対象，2 の系を測定器とし，適当な相互作用を通して状態 (3) を作り，対象系と測定系の間に完全な相関を生じさせるのである．測定は測定器が目盛りに対応する状態 $|\xi\rangle_2, |\eta\rangle_2$ のどちらにあるかを調べることによって達成されるが，その結果，状態は

$$|\alpha\rangle_1|\xi\rangle_2 + |\beta\rangle_1|\eta\rangle_2 \to \left\{ \begin{array}{l} |\alpha\rangle_1|\xi\rangle_2 \\ |\beta\rangle_1|\eta\rangle_2 \end{array} \right. \qquad (6)$$

*2) ハイゼンベルクが最初に提示した不確定性関係は，測定の誤差と測定操作による擾乱の積についてのものであったが，これは一般の状態については成立しない．近年，小澤正直氏によってこの型の不確定性関係が見直され，標準偏差を含めたより一般的な形での成立が示されている[2)]．

と変化することになる．このような状態の変化，すなわち測定による状態収縮は，ユニタリー行列による時間変化 (4) では説明できないもので，本質的に不可逆な変化である．これをどう理解すべきかは**観測問題**として従来より議論が喧しいが，実用上は (6) の変化が起こると想定して何ら支障はない．ユニタリーな時間変化だけでなく，このような測定による状態変化の積極的な活用は，新しい量子力学の応用の可能性を拡げるものとして興味深い．測定による状態変化（それのみでは情報伝達はできない）と古典通信等の手段を組み合わせることで可能になる量子暗号通信や量子テレポーテーションは，その活用例である．

最後に，量子もつれに関して2点，補足しておこう．量子もつれ状態 (3) を構成する2つの部分系が，空間的に十分に離れたところに局在する場合には，測定による相関の実現 (6) は部分系間の距離に依らず“瞬間的”に起こることになる．2つの部分系が十分遠くに離れている場合には，一方の系の測定が他方の系に影響を及ぼさない（局所性）とするならば，測定によって得られた各々の系の物理量の値は，測定前から定まっている（実在性）ものと考えられる．ところが量子力学では，この2つの部分系での物理量に対する演算子が交換しない場合には，前に述べたようにこれらの物理量の測定値が同時に定まる状態は存在しない．このような，本来は値が定まっているはずの物理量が確定できないパラドックス的状況の存在は，量子力学が理論的に不完全であることを示すものだとしたのが，1935年のアインシュタイン＝ポドルスキー＝ローゼンのEPR論文である．これは量子もつれ状態の持つ本質的な**非局所性**と，その物理的重要性を指摘した画期的な仕事であり，近年の量子情報科学の概念的な基礎は，究極的には彼らの問題意識に帰着するものと言えよう．

また，上に述べた測定の議論では，実際の測定系は最終的にはマクロ系でなければならないから，測定前の量子もつれ状態 (3) は，マクロに異なる2つの測定器の状態を重ね合わせた奇妙な状態であることになる．そのような状態は，冒頭の筆者の場合には $|$鬱$\rangle$ と $|$躁$\rangle$ の重ね合わせ状態という，概念的に矛盾する状態に相当する．マクロ系の測定可能な状態の重ね合わせ状態は，シュレディンガーがEPR論文に触発されて，猫の $|$生$\rangle$ と $|$死$\rangle$ の状態を例にとって議論したことより，しばしば**猫状態**と呼ばれる．そしてそのような猫状態の実現可能性を追求することは，量子力学の限界と本質を調べる上で，非常に重要な研究課題になっている．

3. 最近の研究から

さてここで，最近の量子力学の基礎研究の中で，特に興味深い話題をひろってみよう．まず上述のように，量子力学の基礎と応用の要（かなめ）になっているベル不等式は，古典物理学の基礎である物理量の局所性と実在性を併せた**局所実在論**に基づいて導かれている．ベル不等式を検証し，局所実在論を退けて量子力学の結果を支持した初期の実験として1982年のAspectらの実験が有名であるが，これは実証的には局所性（量子もつれ状態にある2つの部分系が十分に空間的に離れていること）と統計性（測定における検出効率）の両面でやや不完全なものであった．以来，この弱点を克服するための努力が続けられており，近年では1998年のWeihらの実験で局所性を，また2001年のRoweらの実験では統計性の問題を解決しているが，現在のところ，2つの問題を同時に克服するのに成功した実験は行われていない[3)]．

ベル不等式の検証は，制御技術が発達した光子を用いて行われることが多いが，量子力学の正当性の検証には，エネルギーや空間スケールの異なる多様な手段を用いて多角的に行うことが望ましい．最近では，2006年の陽子を用いた東大の酒井グループによる実験[4)]や，2007年のKEKのBelleグループによる（陽子の5倍以上の質量を持つ）B 中間子を用いた試み[5)]があり，今後の進展が待たれている．一方，ベル不等式に依らず，統計性の問題のない局所実在論の検証実験も種々の提案がなされており，例えばる3体系の特殊な（GHZ状

態と呼ばれる）量子もつれ状態に基づく近年の実験でも，やはり量子力学を支持する結果が得られている[6]．

これらの一連の検証実験の結果は局所実在論が正しくないことを指し示しているが，それでは正しくないのは局所性か実在性か，それともその両方なのだろうか．この解明に向けて，2003 年に Leggett は局所性を前提としないある種の実在論が満たす，ベル不等式と類似の不等式を提示した．その検証は高度な技術を要するものであったが，2007 年に複数のグループによって実験が行われて，この Leggett 不等式もどうやら破れているらしいことが判明している[7]．この結果は，局所性の放棄だけでは不十分であり，アインシュタインが最も重要視していた物理量の実在性にさえも，疑いの目を向けざるを得ないことを示唆しているようである．

量子力学における実在性に関する基礎的な仕事に，1967 年の Kochen と Specker による物理量の**状況依存性**の定理がある．これは，物理量 A と同時に測定できる別の物理量 $B, C, \ldots$ がある（すなわち対応するエルミート行列 A は，行列 $B, C, \ldots$ のいずれとも個別に交換する）とき，測定の組合せには依存せず，かつそれらの物理量の間の整合性を保つように A に実在的な値を持たせることは，一般に不可能であることを示したものである（図 2 参照）．もしこれらの物理量が局所的に存在するならば，測定する物理量の選択によって測定装置の設定も異なるから，測定結果もこれらの状況に依存してしまうことは不思議ではない．しかしベル不等式の検証結果は，遠く離れた非局所な位置関係にある 2 つの物理量に対しても，同様な状況依存性が存在することを示すものであり，その意味で自然界の非局所的な状況依存性を明らかにするものとなっている．

ところで Kochen は 2006 年になって，Conway と共に**自由意志定理**なる興味深い結果を発表している[9]．これは上の状況依存性定理に，アインシュタインが EPR 論文で採り上げた量子力学の持つ完全相関の性質と，情報伝達の速度には上限があ

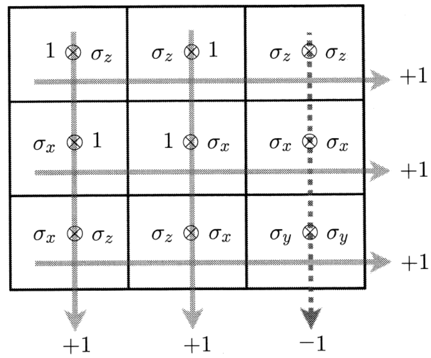


図 2　状況依存性を示す Mermin の魔方陣[8]．スピンの各成分 σ_i, $i = x, y, z$ を 2 個の電子に対して測定する．上の 3 行，3 列ともに同時に測定できる 3 つの物理量からなる 6 種類の組合せになっているが，組合せに依らずに独立に測定値を割り当てようとすると，Pauli 行列の性質 $\sigma_i^2 = 1$ や $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ の性質から，それぞれの組の測定値の積は第 3 列の -1 を除いてすべて $+1$ になる．9 つすべての測定値の積を作ると，行の積 3 つから作る場合（$+1$）と列の積 3 つから作る場合（-1）とで結果が矛盾してしまう．

ること（相対性理論では光速が上限を与える）を組み合わせたもので，人間の“自由意志”――測定者が測定方法を自由に選択できること――と同様の意味で，光子や電子などの測定対象にも“自由意志”――測定対象が測定結果を自由に選択できること――が存在することを示したものである．この結果はその後，様々な論議を呼んでおり，また Kochen らも定理をさらに補強し精密にするなど，今後の推移が注目される．

前節の終わりに触れた，マクロ量子状態の重ね合わせである猫状態の可能性についても研究は進展しており，その最も見やすい結果は，おそらく 2003 年の Zeilinger らによる $C_{60}F_{48}$ 分子の干渉実験[10]と，2007 年のアゾベンゼン分子の干渉実験[11]であろう．前者は 1632 原子質量単位を持ち，後者は最大の長さが 32 オングストロームもあるにも拘らず，波動特有の干渉効果が実験的に確認されたことは驚きである．

猫状態がどの程度のマクロなスケールまで実現可能かという問題は，観測問題の解決の観点からも重要であり，系統的な検証プログラムが Leggett

によって提案されている[12]．そのプログラムの見地から猫状態として最もマクロなものは，超伝導量子干渉計（SQUID）の2状態間の重ね合わせ状態を検証した近年の実験で，10^{10} 個程度の基本要素（粒子）が干渉に関与していると見積もられている[13]．Leggett はさらに進んで，マクロな意味での実在性——大雑把に言えば人間が日常的な感覚として自明だとしているもの——と量子力学との整合性の検証も提案しており，この方面での今後の実験結果も期待されている．

その SQUID が作る2状態系において，本来は不可逆な測定による状態収縮のプロセスを，逆転させて元の状態に戻すという実験報告が，2008 年に Katz らによってなされた[14]．これは，完全な収縮 (6) を伴わない“弱い測定”を2度行うことによって実現するもので，最初の測定で部分的に収縮した状態に対して，その測定によって得た古典的情報を喪失させる2回目の測定を行って，元の状態を復元するというものである．この結果がもし完全に実証されれば，将来の量子暗号の安全性や量子計算の実現にもインパクトを与えるだろう．またマクロな領域にまで引き延ばすことができるならば，猫状態に弱い測定を行って一定の確率で一時的に猫の生死を確定したとしても，最終的には元の猫状態に復元できることを意味し，マクロ実在性などの基本問題の観点からも興味深い．

最後に，量子力学の干渉効果を逆利用して，対象に全く“触れずに”その存在を検知する**非相互作用測定**について，近年の進展を述べておこう．これは 1993 年に Elitzur と Vaidman が提示した爆弾検査の思考実験[15]が発端になったもので，どんなに微かな（例えば1個の光子による）相互作用でも爆発してしまう爆弾の存在を，量子干渉計を用いて検出することが原理的に可能であることを示すものである．当初の提案では検出効率は 25%であったが，その後量子ゼノン効果と組み合わせることによって，原理的には 100%に近い検出が可能であることが Kwiat らによって示されている[16]．

残念ながら，この方法は技術的な困難のために，実際の実験では効率が 70%程度しか達成できていないが，これに対してより実用的で，かつ概念的にも簡単な非相互作用測定の方法が，1998 年に Tsegaye[17]らによって提案された．それは Fabry–Pérot 干渉計を用いるもので，図 3 にあるような2枚の鏡に囲まれた空洞に一方から光を入射させ，鏡の距離をうまく調節することによって，両者の間で反射した光の干渉により完全に入射光が他方に透過するようにしたものである．この空洞の中に光を通さないもの（今の場合は爆弾）があれば，干渉が生じず，入射光は完全に反射するようにすることが事実上可能であり，その結果，空洞中の爆弾の有無が，反射した光子を検出するだけでわかることになる．実際，この方法により，88%の効率の達成報告が 2006 年に行方らによってなされている[18]．

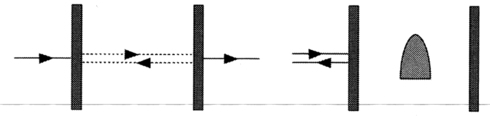


図 3　Fabry–Pérot 干渉計を用いた爆弾検査実験．空洞の中に爆弾がなければ，干渉のために入射光は透過する（左図）．一方，空洞中に爆弾があれば，干渉が生じないので入射光は空洞中に入らず反射する（右図）．反射した光子を検出すれば，爆弾に一切触れずに空洞中の爆弾の有無を知ることができる．

非相互作用測定は，測定対象と物理的な接触をしないでその存在や性質を検知するパラドックス的現象であり，“反事実的”（counterfactual）な現象とも呼ばれている．それゆえ，現在提案されている“反事実的量子計算”を含めて，もし今後非相互作用測定に基づく応用が可能になれば，新しい意味での量子力学の威力が現実のものになるだろう．なお，非相互作用測定のパラドックス的状況を“理解”するために，Vaidman 自身は量子力学の多世界解釈を援用し，爆弾が爆発する別世界の存在によって，爆発なしに爆弾を検知できることが矛盾しないのだとしている．

その正当性は暫く措くとしても，これら近年の量子力学の基礎の研究によって，自然界は徐々にベールを剥がれて本来の深層の姿を現しつつあり，その新しい姿に対応できるような，新たな直観的

理解力を養成する時に来ているのかも知れない.

参考文献

1) 量子力学の構成については，例えば以下の教科書に簡潔な説明がある：C.J. Isham, "Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations", (World Scientific, 1995, Singapore); 邦訳「量子論—その数学および構造の基礎」佐藤文隆，森川雅博共訳（吉岡書店，2003 年）.
2) 小澤正直：不確定性原理の新展開—古い解釈と新しい定式化，数理科学 2005 年 10 月号特集「不確定性原理の新展開」(サイエンス社).
3) ベル不等式の実験的検証は，その歴史的な変遷を含め以下の文献に詳しい：A. Aspect, in "Quantum [Un]speakables – From Bell to Quantum Information", eds. R.A. Bertlmann and A. Zeilinger (Springer, 2002, New York).
4) H. Sakai *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006) 150405.
5) A. Go *et al.* (Belle Collaboration), *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007) 131802. なお，*B* 中間子実験の局所実在論における意義については，T. Ichikawa, S. Tamura and I. Tsutsui, *Phys. Lett.*, **A373**, (2008) 39.
6) J.-W. Pan *et al.*, *Nature*, **403** (2000) 515.
7) S. Gröblacher *et al.*, *Nature*, **446** (2007) 871; T. Paterek *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007) 210406; C. Branciard *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007) 210407.
8) 状況依存性とベル不等式については，Mermin による極めて優れた解説がある：N.D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.*, **65** (1993) 803.
9) J. Conway and S. Kochen, *Found. Phys.*, **36** (2006) 1441.
10) L. Hackermüller *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003) 090408.
11) S. Gerlich *et al.*, *Nature Physics*, **3** (2007) 711.
12) Leggett の検証プログラムについては，以下の教科書が詳しい：高木伸：「巨視的トンネル現象」(岩波書店，1997 年).
13) A.J. Leggett, *J. Phys. Cond. Mat.*, **14** (2002) R415. なお，Leggett の量子力学の基礎に関する見解を手短かに知るには：A.J. Leggett, *SCIENCE*, **307** (2005) 871.
14) Katz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 200401.
15) Elitzur と Vaidman の爆弾検査実験（の Penrose による改訂版）の和文解説は，筒井泉：量子力学の非常識な魅力，別冊・数理科学「量子の新世紀」(サイエンス社，2006 年). Vaidman による最近の解説は：L. Vaidman, in "Compendium of Quantum Physics: Concepts, Experiments, History and Philosophy", eds. F. Weinert *et al.*, (Springer, 2009, New York).
16) P. Kwiat *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 4763.
17) T. Tsegaye *et al.*, *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 3987.
18) N. Namekata and S. Inoue, *J. Phys. B*, **39** (2006) 3177.

(つつい・いずみ，
高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所)

干渉と識別の相補性

不確定性関係との関わりを巡る論争小史

谷村 省吾

1. 干渉と識別

干渉とは，2通り以上の経路を伝わってきた波動が重なり合い，強め合ったり弱め合ったりする現象である．音波でも水面の波でも干渉は起こるが，とりわけ光の干渉は身近な現象である．CDやDVDなどの記録面が色づいて見えるのも干渉だし，シャボン玉の薄膜が色づくのも干渉である．ディスクの表面には等間隔の凹凸があり，この凹凸で散乱された光が重なり合って，ある方向では強め合い，別の方向では弱め合う．光の波長によって強め合う方向が異なるので，我々の眼には角度によって異なった色が見える．シャボン玉では薄膜の表面と裏面で反射された光が重なり合って干渉し，膜の厚さと光の角度と波長の兼ね合いで，ところどころ異なった色がつく．チョウの翅(はね)の鮮やかな色にも，翅の表面の鱗粉によって散乱された光が干渉することによって生じる色がある[1]．この種の色は構造色と呼ばれ，最近は自動車の塗装や化粧品にも使われているそうである．

光の干渉はありふれた現象であるが，光に限らず，電子や原子などのミクロな「粒子」はすべて干渉を起こすことができる，というのが量子論の教えるところである．一方で光もまた粒子性を示し，一つの光子は一定のエネルギーや運動量を運ぶ．

波動は空間に広がって伝わっていくものであるのに対して，粒子は一つ，二つと数えられ，一つの粒子は空間中の一箇所を占める．「粒子」という言葉の定義から言って，一つの粒子が空間中の異なる2点を同時に占めることはあり得ないと考えられるのだから，「粒子が干渉を起こす」ことは，言葉の使い方からしておかしいし，この現象を物理としてどう記述し，どう解釈したらよいのかという深刻な問題をもたらす．

ミクロの「粒子」が波動性を備えていることを示す有名な実験は，ダブルスリット実験である（図1）[2]．使用する粒子は，原子でも電子でも光子でもよいが，便宜的に電子と呼ぶ．2つの切れ目（スリット）を開けた壁に向かって多数の電子を発射し，壁の後方に設置したスクリーンで電子を受け止める．片方のスリットを開けたときは，電子の到達点はなだらかに分布する．両方のスリットを開けたときには，電子の到達点は干渉縞と呼ばれるパターンを作る．このパターンは，各スリットを別々に開けた場合の分布の和ではない．電子は一粒・二粒という単位でぽつりぽつりとスクリーンに到達するのだが，あたかも波動が2つのスリットを同時にすり抜けて合流したかのような干渉模様を作るのである．

さらに，電子がどちらのスリットを通過したかを監視する装置を備え付けると，干渉縞は損なわれてしまう．電子の粒子性と波動性は同時には観測できないように自然は仕組まれているようである．「どういう仕組みが，識別と干渉の両立を妨げているのか」というのがこの記事で議論したい問題である．

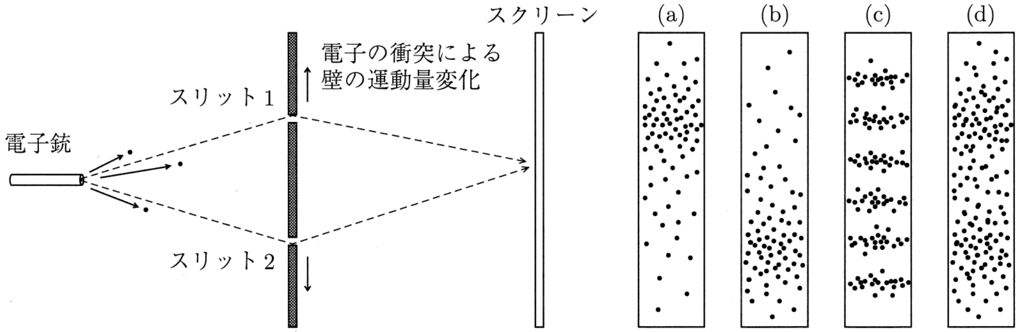


図１　電子のダブルスリット実験．(a) スリット１のみ開けた場合．(b) スリット２のみ開けた場合．(c) スリット１, ２両方開けた場合．(d) 両方開けて，電子がどちらのスリットを通過するか監視した場合．

この問題は，特に目新しいものではない．量子力学の成立直後の1927年には，量子力学は不完全であると主張するEinsteinと量子力学を擁護するBohrとの論争が始まっており，ダブルスリットの問題が提起されている[3]．朝永振一郎は「光子の裁判」[4]と題して，どちらの窓を通ったか監視していないときには干渉し，監視員を置くと干渉をやめてしまう光子の不思議を，面白い小説に仕立て上げている．

2. 不確定性関係による説明

ダブルスリット実験において電子の経路を識別しようとすると干渉縞が損なわれる仕組みの説明は，最初にBohr[3]によって与えられた．思考実験ではスリット壁を可動な作りにしておく．電子が上のスリットに当たれば電子は上向きの運動量を可動壁に与えるし，電子が下のスリットに当たれば電子は下向きの運動量を可動壁に与える．したがって可動壁の運動量変化を測れば，電子がどちらのスリットを通過したか判定できるであろう．こうしておけば粒子的な特性である唯一の経路を識別しつつ，波動的な干渉縞を観測できるのではないか，というのがEinsteinの指摘であった．しかしBohrは，運動量と位置の不確定性関係のために識別と干渉は両立し得ない，と反論した．通過スリットの識別のために可動壁の運動量を測ろうとすると，可動壁の位置がゆらぎ，干渉縞の山が現れるべき位置に谷が重なり，干渉縞のコントラストが失われるというのがBohrの説明であった．

もう少し詳しく説明しよう．1926年にHeisenbergは位置の不確定分 Δq と運動量の不確定分 Δp とPlanck定数 h の間に

$$\Delta q \cdot \Delta p \gtrsim h \tag{1}$$

という関係が成り立つことを発見した[*1]．これを不確定性関係と言う．スリットの間隔を d, スリット壁からスクリーンまでの距離を L, 波動の波長を λ とすると，($L \gg d \gg \lambda$ のとき) 干渉縞の間隔は

$$\rho = L \cdot \frac{\lambda}{d} \tag{2}$$

であるから，スリット壁がぐらぐら動いたとしても，ある程度のコントラストを持った干渉縞ができるためには，スリットの位置のゆらぎ Δq は

$$\Delta q < \rho = L \cdot \frac{\lambda}{d} \tag{3}$$

よりも小さくなければならない．一方で，粒子の運動量を p とすると上または下のスリットに当たった粒子が壁に与える運動量の差は

$$\varepsilon = p \cdot \frac{d}{L} \tag{4}$$

の程度だから，通過スリットの識別のためにはこれより高い精度で壁の運動量を測ってやる必要がある．つまり運動量の測定誤差 Δp は

*1)　式 $A \gtrsim B$ は，不等式 $A \geq cB$ において10から $\frac{1}{10}$ 程度の大きさを持つ係数 c を省略した式である．

$$\Delta p < \varepsilon = p \cdot \frac{d}{L} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{d}{L} \tag{5}$$

よりも小さくなければならない．2つの要請 (3), (5) を同時に満たしたとすると，

$$\Delta q \cdot \Delta p < h \tag{6}$$

でなければならない．しかし，これは不確定性関係 (1) に反する．したがって要請 (3), (5) の両方を同時に満たすことは不可能であり，位置の不確定分が大きすぎて干渉縞がぼやけて見えなくなるか，運動量の不確定分が大きすぎて通過スリットの識別が不可能になるか，どちらかは受け入れなければならない．

粒子らしさを観測するような実験条件を設定すれば粒子らしい振舞いが見られるし（経路識別実験），波動らしさを観測する設定にすれば波動らしい振舞いが見られる（干渉実験）．しかし，粒子・波動の両方の性質を同時に観測するような実験のやり方はないし，両方の性質を同時に担うような実体も想定できない．観測とは，観測装置が対象物に働きかけたところに生ずる現象であり，観測結果を対象物だけに帰属させることは意味がないし，異なる条件設定の下に行われた観測の結果を単独のイメージにまとめることはできない*2)．このようなミクロの世界の性質を Bohr は**相補性** (complementarity) と呼んだ．

3. 不確定性関係不要論？

さて，ダブルスリット実験において識別と干渉が両立しないのは，可動壁の位置と運動量の不確定性関係のせいだという，一応の説明がなされたわけだが，それに対する異論もある．1989 年に Scully, Walther と Englert[6] の 3 人は，粒子と運動量のやり取りをしない装置でも，経路の識別ができるというモデルを提唱した．彼らの案では 2 つのスリットの直前に共鳴空洞（中空の金属箱）を置く（図 2）．飛んでいる原子が空洞に入る前に，原子にレーザーを当てて励起状態にしてやる．原子は 2 つの共鳴空洞のうち一方の内部で光子を放出して基底状態に戻る．したがって，空洞内の光子を調べれば原子がどちらのスリットを通ったかが分かる．

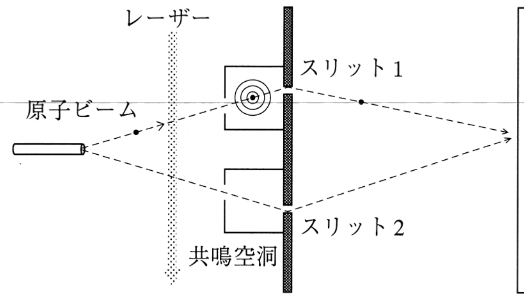


図 2 Englert たちのモデル．原子はレーザーの照射を受けて励起状態になり，共鳴空洞内で光子を放出して基底状態に戻る．

式で書くと，監視装置を備えていないときの原子の波動関数が

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

であり，このうち $\psi_1(x)$ がスリット 1 を通過した波動関数，$\psi_2(x)$ がスリット 2 を通過した波動関数である．スクリーン上の位置 x に原子を見出す確率は

$$|\psi(x)|^2 = |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\psi_1^*(x)\psi_2(x)$$

で与えられる．ここで $\mathrm{Re}\,\psi_1^*\psi_2$ の項が干渉効果を表す．しかし，共鳴空洞を備え付けると終状態は

$$\psi = \psi_1(x) \otimes \xi_1 + \psi_2(x) \otimes \xi_2 \tag{7}$$

となる．ここで ξ_1 は空洞 1 に光子が 1 個あるという状態であり，ξ_2 は空洞 2 に光子が 1 個ある状態である．そうすると $\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = 0$ であるから，原子が位置 x に見つかる確率は

$$\begin{aligned} P(x) &= |\psi_1(x)|^2 \langle \xi_1 | \xi_1 \rangle + |\psi_2(x)|^2 \langle \xi_2 | \xi_2 \rangle \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\,\psi_1^*(x)\psi_2(x) \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle \\ &= |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 \end{aligned}$$

となり，干渉項は消える．式 (7) のような，原子

*2) 異なる条件設定の下に行われた観測の結果を担う実体が存在する，と想定すると，実験事実と食い違う予測が導かれてしまうことがある．その種の予測が Bell の不等式や Clauser–Horne–Shimony–Holt の不等式[5] である．

と他の装置の状態が絡まった状態はエンタングル状態と呼ばれる．原子の経路は空洞内の光子と相関を持ち，経路の違いは，光子の異なる状態，すなわち直交状態に記録されるため，原子の干渉項が消されるというのがScullyたちの説明である．

この考えに対してStorey, Tan, Collett, Walls[7]が異論を唱えた．彼らは，干渉縞が損なわれるときには必ず運動量の変化が伴っていると主張する．空洞の中で原子は光子を繰り返し放出・吸収して運動量変化を受けているのだと彼らは言う．

2つのグループ間の論争は次第に熱を帯びてきて，1995年には誌上討論[8]が展開された．Englert, Scullyたちは不確定性関係が必ずしも干渉・識別の相補性の理由ではないと主張し，Storeyたちはあくまで位置・運動量の不確定性関係が根本的原因であると主張する．

誌上討論以前の1992年にはBhandari[9]が，運動量を使わずに角運動量の測定で経路を識別するモデルを調べている．彼の分析によれば，角運動量と角度の不確定性関係，それにPancharatnamの幾何学的位相が加わって干渉縞が損なわれる．

1993年にEichmannたち[10]は興味深い実験結果を報告した．彼らは2つの水銀イオンを空中に浮かべて静止させ，これらに偏光レーザー光を照射して，散乱光を観測した．つまり，2つの水銀イオンをダブルスリットに見立てた光干渉実験を行った．光子は水銀イオンに当たったときに，イオンに角運動量を渡して，偏光状態が変化することがある．あるいは，角運動量のやりとりは起こらず，散乱光の偏光状態は入射光の偏光状態のままということもあり得る．そうすると，偏りが変化した光子は，どちらのイオンに当たったかという痕跡をイオンに残しており，干渉を起こさないだろうと考えられる．一方で，偏りの変化のない光子は，どちらのイオンに当たったかという痕跡を残しておらず，したがって監視なしのダブルスリットと同じ状況になり，干渉を起こすと考えられる．彼らはこういう実験をやって，予想通りの結果を得た．つまり，カメラの直前に偏光フィルターを置いて，入射光と比べて同じ偏光状態を持つ光と，異なる偏光状態を持つ光とを選り分けて観測した．偏光変化のなかった光は干渉縞を示し，偏光変化を起こした光は干渉縞を示さなかった．この実験の場合，明らかに光子はイオンにぶつかって運動量のやりとりを行い，進路を変更している．それでも偏光状態さえ変わらなければ，きれいな干渉縞を作ったのである．したがって干渉縞が損なわれる理由を，運動量の誤差や位置のゆらぎのせいにすることには無理がある．

GreenbergerとYasin[11]およびEnglert[12]は粒子の経路の判定のもっともらしさ（尤度（ゆうど））Dと干渉縞のコントラストVの間に

$$D^2 + V^2 \leq 1 \tag{8}$$

という関係が成り立つことを理論的に示した[*3]．

1998年にはDürr, Nonn, Rempe[14]がルビジウム原子ビームの干渉実験を行った．原子の超微細構造状態（原子核のスピンと電子の軌道運動の相互作用による微細なエネルギー差）の違いで原子の経路を識別すると干渉縞が消失することを彼らは示した．彼らが用いた原子のビームは太くて，2方向に散乱されたビームは散乱領域では重なりっぱなしである．つまり原子ビームが，細く絞られた2本のビームに分離されてはいない．また彼らの実験では経路を識別するために，運動量の差ではなく，原子の内部状態の違いを用いている．したがって，位置と運動量の不確定性関係を当てはめるべき状況ではない．それにも関わらず，経路識別を行ったときには干渉縞は消え，識別をやめれば干渉縞は現れた．また，相補性不等式(8)も実験的に確かめられた．こうしてEnglertグループ対Storeyグループの論争は，Englertたちの勝利で決着がついた（と言ってよいと思われる）．つまり，相補性は必ずしも位置と運動量の不確定性関係の結果ではなく，相補性のほうがより普遍的な概念である，という言い分のほうが妥当である．

---

*3）　細谷暁夫氏ら[13]は，エンタングルメント度とコントラストの間にも同様の関係式が成り立つことを示した．

4. 相補性と非可換性

ところで，Englert[12] は，干渉と識別の相補性は，演算子の非可換性とは何の関係もなく，Heisenberg や Robertson の不確定性関係とも無縁であるとまで言っている．しかし，それは言いすぎではないか，と私は思う．Storey ら[7]は，あくまで位置と運動量の不確定性関係が基本原理であり，干渉と識別の相補性もその結果として説明されるべきであると主張していた．私には，いずれの主張も極論であり，両者を特別な場合として含むような一段高い視点があるように思われる．このことを議論しよう．

ダブルスリットの干渉縞を観測する設定に，粒子の通過スリットを識別する装置を付け加えた実験のモデルを以下のように考えよう．ダブルスリットを通過する直前の粒子の状態ベクトルを ψ，測定装置の状態ベクトルを ξ とすると，系全体の初期状態は $\psi \otimes \xi$ と表される．スリット 1, 2 のどちらを通過したかに応じて粒子の状態が $\psi = \psi_1 + \psi_2$ と分解され，それに応じて測定装置の状態も $U_1\xi$ または $U_2\xi$ に変化する．U_1 と U_2 は測定装置の状態に作用するユニタリ演算子である．するとスリット通過後の系全体の状態は

$$\psi_1 \otimes U_1\xi + \psi_2 \otimes U_2\xi \tag{9}$$

となる．これは (7) と同様のエンタングル状態である．粒子を位置 x に見出す確率は

$$\begin{aligned} P(x) &= |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\,\psi_1^*(x)\psi_2(x)\,\langle U_1\xi|U_2\xi\rangle \end{aligned}$$

となり，係数

$$V = \left|\langle U_1\xi|U_2\xi\rangle\right| = \left|\langle \xi|U_1^\dagger U_2|\xi\rangle\right|$$

の分だけ干渉縞のコントラストが失われる．V は $0 \le V \le 1$ なる実数である．また，粒子がどちらのスリットを通ったかという情報は，測定装置の自己共役演算子 M で読み出される．スリット 1, 2 の識別ができるためには，U_1 の作用と U_2 の作用で測定値に差異が生じなければならないのだから

$$U_1^\dagger M U_1 \neq U_2^\dagger M U_2 \tag{10}$$

でなくてはならない．つまり，識別可能なための必要条件は

$$(U_1^\dagger U_2)(U_2^\dagger M U_2) \neq (U_2^\dagger M U_2)(U_1^\dagger U_2)$$

である．このことは，干渉縞の強度を表す演算子 $U_1^\dagger U_2$ と識別装置の読みを表す演算子 $U_2^\dagger M U_2$ が非可換であることを意味している*4)．したがってこれらの演算子の間には不確定性関係が成立する．100 パーセントの確率で粒子の通過スリットを識別できたとすると，測定器の読み取り値によって確実に 2 通りの状態を見分けられるのだから，$U_1\xi$ と $U_2\xi$ は自己共役演算子 M に対して異なる固有値を持つ．したがって $U_1\xi$ と $U_2\xi$ は直交し，$V = |\langle U_1\xi|U_2\xi\rangle| = 0$ となり，干渉縞は完全に損なわれる．逆に，干渉縞の強度が 100 パーセントだとすると，$V = 1$ であり，状態 $U_1\xi$ と $U_2\xi$ は位相因子を除いて等しく，測定装置は粒子の通過スリットをまったく区別できないことになる．

経路を識別しようとすると，条件 (10) を満たす M，すなわち，干渉を特徴付ける演算子 $U_1U_2^\dagger$ と非可換な識別装置の演算子 M を導入せざるを得ない．この非可換性が，波動と粒子の両方の性質を同時に観測する実験を不可能にしており，波動性と粒子性を同時に担った一まとまりの実体を想定することを無意味にしているのである．

5. どの不確定性関係？

干渉と識別の相補性は，特別な実験設定では位置と運動量の不確定性関係の結果として理解できるし，一般的には，干渉を捉える演算子と識別装置の演算子の非可換性を反映している，ということは分かったが，もう一つ議論しておきたいことがある．実は不確定性関係にはいくつものバージョンがあり，それぞれ物理的意味も数学的表式も異なっている．したがって，今まで議論していた不確定性関係がどのバージョンに当たるのか，考え

*4) $U_2^\dagger U_1$ と $U_1^\dagger M U_1$ が非可換，あるいは，$U_1 U_2^\dagger$ と M が非可換である，という書き方をしてもよい．

ることには意味があるだろう．

不確定性関係に関する議論にしばしば混乱が見られるのは，「不確定性」という概念が曖昧なまま使われているせいである．物理量 A の「不確定さ」を正確に定量的に定めようとすると，定義の候補がいくつかある．一つ目は，誤差 $\varepsilon(A)$ である．対象物に属する物理量 A を測ろうとするとき，実際には我々は測定器の目盛り M を読んで A の値を決めているのであり，M と A が等しくなるようにするのが「よい測定」であるが，現実には必ずしも M と A は等しくならない．メーターの読み取り値 M と，本当に知りたい値 A との差が**誤差**（error）であり，

$$\varepsilon(A) = \sqrt{\langle (M-A)^2 \rangle}$$

と定義される．ここで期待値 $\langle \cdot \rangle$ は，同じ設定の実験の繰り返しに関する平均である．

二つ目は，擾乱 $\eta(B)$．一般に測定は，有限の時間経過を伴う，対象系と測定器の相互作用のプロセスである．測定を行う直前に系が持っていたはずの物理量の値 B と測定直後の値 B' は異なり得る．それらの差が，測定によって系が受けた**擾乱**（disturbance）であり，

$$\eta(B) = \sqrt{\langle (B'-B)^2 \rangle}$$

と定義される．

三つ目は，**標準偏差**（standard deviation）$\sigma(A)$．これは，同じ実験設定で測定を多数回繰り返したときに得られる測定値のばらつきを表し，

$$\sigma(A) = \sqrt{\langle (A-\langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

と定義される．誤差 ε，擾乱 η，標準偏差 σ のどれも「不確定さ」の指標ではあるが，物理的内容も数学的定義も異なっていることに注意してほしい．

これらの記法を用いて Heisenberg の不確定性関係を書くと，位置 q の誤差と運動量 p の擾乱に関する

$$\varepsilon(q) \cdot \eta(q) \gtrsim h \tag{11}$$

という不等式になる．「位置を正確に測ろうとすると，運動量が乱される」という言い方に即した関係式である．あるいは Heisenberg が示そうとしたのは

$$\sigma(q) \cdot \sigma(q) \gtrsim h \tag{12}$$

という関係式かもしれない．この式が意味するところは「量子系においては，位置のばらつきと運動量のばらつきの両方をゼロにすることはできない」ということだ．上で「かもしれない」という曖昧な言い方をしたのは，Heisenberg 自身[15)]は，不等式の証明を一回だけ与えたのではなく，いろいろな物理的状況を想定して，いろいろなモデルを考案し，思考実験を繰り返して，この種の不等式が成り立つことを繰り返し確認したのであり，彼のモデルの中には (11) を導くような状況設定になっているものもあるし，(12) に分類すべき設定になっているものもあるからである．つまり，Heisenberg は，誤差・擾乱・偏差の明確な区別はしていない．また彼は数学的な証明を与えたのではなく，いくつかのケース・スタディを経て，これらの不等式が一般的な状況でも成り立つであろう，と推論したのである．(11), (12) という区別は，我々が後知恵をもとにしたことである．

モデルによらずに不確定性関係の一般的な証明を与えたのは Kennard で，彼は

$$\sigma(q) \cdot \sigma(q) \geq \frac{1}{2}\hbar \tag{13}$$

という不等式を証明した．Robertson は，一般の自己共役演算子 A, B に対して

$$\sigma(A) \cdot \sigma(B) \geq \frac{1}{2}\left| \langle [A,B] \rangle \right| \tag{14}$$

が成り立つことを証明した．これは Schwarz の不等式を用いて簡単に証明できるし，演算子の非可換性が不確定性関係と直結していることが一目瞭然となる表式なので，たいていの量子力学の教科書で解説されている．

しかし，Kennard の不等式 (13) は数学的には正しいが，Heisenberg の不等式 (11) を Kennard の不等式 (13) で置き換えることは，物理的内容もすり替えることになる．Kennard の不等式は，同じ状態の対象系のコピーを多数用意して，そのうちのいくつかについては位置 q の測定を行い，

別のいくつかについては運動量 p の測定を行ったとしたら，それらの測定値のばらつきの間には (13) のような関係が成立する，と言っているのであり，位置を測定したせいで運動量が乱された，と言っているのではない．Kennard の設定においては，位置の測定と，運動量の測定は，そっくりだが別の系に対して行われる実験である．ところが，Heisenberg の不等式 (11) は，位置を測定されたその系の運動量がどれだけ乱されるか，ということを問題にしている．

そうこうするうちに，「不確定さ」の厳密な定義が反省・吟味されることもなく，Heisenberg 自身も Kennard と Robertson の証明で満足してしまったようで，不確定性関係は Kennard の形 (13) で人々に知れ渡っていった．この状況に疑問を投げかけ，明確な答えを与えたのは小澤正直氏である[16]．彼は

$$\varepsilon(A)\cdot\eta(B)+\sigma(A)\cdot\eta(B)+\varepsilon(A)\cdot\sigma(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right| \qquad (15)$$

という不等式を証明した[17]．しかも彼は Heisenberg の不等式 (11) を破るようなモデルを作って見せた．Heisenberg の不等式 (11) が正しいとしたら，位置の測定誤差 $\varepsilon(q)$ をゼロに近づけると運動量の擾乱 $\eta(p)$ は発散してしまうはずだが，小澤氏の作ったモデルでは，量子力学に従いながら，$\varepsilon(q)$ をゼロに近づけても $\eta(p)$ は有限な値にとどまる[*5]．

さて，数学的に正しい不確定性関係は Kennard の (13)，Robertson の (14)，小澤の (15) の 3 通りであり，$[q,p]=i\hbar$ だから (13) は (14) の特別な場合に含まれることが分かった．ここで次のような疑問を提起しよう：「干渉と識別の相補性を保証している不確定性関係は，Kennard–Robertson 型のものか，それとも小澤型のものか？」

この問題に対する私の答えは「Kennard–Robertson 型」である[18]．可動スリット壁の位置と運動量を q,p とすれば，粒子がスリットにぶつかったときに可動壁に運動量 $\pm k$ を与える演算子は

$$U_1=e^{ikq},\quad U_2=e^{-ikq}$$

であり，可動壁の運動量の符号を測って通過スリットを識別する測定器は

$$M=\theta(p)-\theta(-p)$$

という演算子で表される[*6]．干渉演算子 $U_1U_2^\dagger=e^{2ikq}$ は演算子 q を含んでおり，識別演算子 M は演算子 p をその定義に含んでいる．そのため $U_1U_2^\dagger$ と M は非可換になっており，測定装置の状態 ξ をどう選んでも $U_1U_2^\dagger$ と M の値にばらつきを生じ，干渉実験と識別実験は同時には成立しない．これは Kennard–Robertson の不等式が意味することである．この問題はまだまだ議論の余地のあるところであり，読者はまた別のモデルを考えつくこともできるであろう．

ダブルスリット実験は，今となっては典型的な量子力学の教材であり，調べ尽くされたと思われるような題材であるが，Englert vs. Storey のように，つい最近でも熱い議論の的となっている．干渉と識別は，量子論の世界と古典論の世界のインターフェイスに生ずる現象であり，近年のテクノロジーの発展のおかげで思考実験の域を超えて現実の実験が可能になってきた現象でもあり，理論的な示唆に富んだ現象である．この小文を通して，そういったことを読者に伝えたかった．

謝辞：本稿の内容の大部分は小嶋泉氏との議論に基づいている．深い洞察を通して生まれてくる氏の議論からは，多くを学ばせていただいている．特に氏が提唱したミクロ・マクロ双対性[19]は量子系と古典系の相互関係についての理解を一新するものであり，本当は干渉と識別の相補性もミクロ・マクロ双対性の観点に照らせば新たな局面が見えてくることなのだろうと思う．また機会を改めてそういった議論を展開したい．

参考文献

1) 木下修一『モルフォチョウの碧い輝き』化学同人 (2005).

*5) 小澤氏は $\varepsilon(A)\cdot\varepsilon(B)+\sigma(A)\cdot\varepsilon(B)+\varepsilon(A)\cdot\sigma(B)\geq\frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|$ という不等式も証明している[17]．

*6) $\theta(p)$ はステップ関数：$p>0$ のとき $\theta(p)=1$，$p<0$ のとき $\theta(p)=0$.

2) 外村 彰「目で見て学ぶ量子力学（第 6 回）」数理科学 2008 年 11 月号，63.
3) ニールス・ボーア（山本義隆編訳）『因果性と相補性：ニールス・ボーア論文集 1』岩波書店 (1999). 特に 13 章「原子物理学における認識論上の諸問題をめぐるアインシュタインとの討論」を参照.
4) 朝永振一郎『鏡の中の物理学』講談社 (1976).
5) J.S. Bell, *Physica* **1**, 195 (1964); J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, and R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
6) M.O. Scully and H. Walther, *Phys. Rev. A* **39**, 5229 (1989); M.O. Scully, B.-G. Englert, and H. Walther, *Nature* **351**, 111 (1991).
7) P. Storey, S. Tan, M. Collett, and D. Walls, *Nature* **367**, 626 (1994).
8) B.-G. Englert, M.O. Scully, and H. Walther, *Nature* **375**, 367 (1995); E.P. Storey, S.M. Tan, M.J. Collett, and D.F. Walls, *Nature* **375**, 368 (1995); H. Wiseman and F. Harrison, *Nature* **377**, 584 (1995).
9) R. Bhandari, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3720 (1992).
10) U. Eichmann *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2359 (1993).
11) D.M. Greenberger and A. Yasin, *Phys. Lett. A* **128**, 391 (1988).
12) B.-G. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2154 (1996).
13) A. Hosoya, A. Carlini, and S. Okano, *Int. J. Mod. Phys. C* **17**, 493 (2006).
14) S. Dürr, T. Nonn, and G. Rempe, *Nature* **395**, 33 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5705 (1998).
15) W. Heisenberg (translated into English by C. Eckart and F.C. Hoyt), *The physical principles of the quantum theory* (Dover Pub. 1930, 1949).
16) 小澤正直「不確定性原理・保存法則・量子計算」日本物理学会誌 2004 年 3 月号，157; 小澤正直「不確定性原理の新展開」数理科学 2005 年 10 月号，5; 石井茂『ハイゼンベルクの顕微鏡：不確定性原理は超えられるか』日経 BP 社 (2005).
17) M. Ozawa, *Phys. Lett. A* **318**, 21 (2003); *Phys. Rev. A* **67**, 042105 (2003); *Phys. Lett. A* **299**, 1 (2002); *Ann. Phys.* **311**, 350 (2004); *Phys. Lett. A* **320**, 367 (2004).
18) S. Tanimura, "The incompatibility relation between visibility of interference and distinguishability of paths", e-print quant-ph/0703118.
19) I. Ojima, "Micro-macro duality in quantum physics", pp.143–161 in Proc. Int. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum (World Scientific, 2005), e-print math-ph/0502038; 小嶋 泉「だれが量子場を見たか」，同題の講演集（日本評論社，2004）pp.65–107 に所収；小嶋泉・谷村省吾「双対性をめぐる物理学対話—量子と古典，ミクロとマクロ」別冊・数理科学『双対性の世界』34 (2007); 小嶋 泉「代数的量子論とミクロ・マクロ双対性」数理科学 2007 年 7 月号，18.

（たにむら・しょうご，京都大学大学院情報学研究科）

量子情報科学のゴッドファーザー

「ダブルスリット実験には，量子力学の核心がある」と言ったのは Feynman である．多くの研究者が取り組んで来たその解析に情報理論を持ち込んだのは，米の Wootters と Zurek だった．彼らは 1979 年に，光子の経路をある程度観測できる装置を使った思考実験で，得られる情報量と干渉縞の明瞭度との関係を定式化した．そして一定の明瞭度を得るために捨てなくてはいけない情報量を見積もった[1]．

彼らは当時テキサス大の学生だった．指導教授の Wheeler は，この成果をことのほか喜んだという．ブラックホールの名付け親でもある相対論の権威はその頃，"It from Bit" というスローガンを掲げ，物理学と情報の関わりを追求していた．

Bohr の直弟子で，観測すなわち情報の記録が物質を存在させる根本的な要素だと考えていた Wheeler は，自然は基本的な情報理論で語ることができ，量子力学もそこから導き出せると予測していた．Wootters らの成果はそうした情報理論の探求の第一歩になると期待していたようだ．

Wheeler は物理学を情報理論にしようとしていたが，1981 年の学会で，逆に情報理論を物理学にしようとしていた Landauer と Bennett に出会う．彼らが話した「情報の物理学」に関心を抱いた Wheeler は，翌年主催した小さな会議に Bennett を招いた．

会議は量子情報科学の号砲となった．参加者の中にいた Wootters は後に量子テレポーテーションの発明に主要な役割を果たし，Zurek はデコヒーレンスの理論を構築した．Deutsch はこの会議で量子コンピューターの発想を得た．量子情報圧縮を提唱する Schumacher も，会議は欠席したが，当時 Wheeler 研の学生だった．

現在の量子情報科学は Wheeler より Landauer の思想を受け継いでいる．だが Landauer が提唱した「情報の物理学」は古典熱力学だった．Wheeler のもとで量子力学の基礎となる情報理論を考えていた研究者たちが，これを「情報の量子力学」へと発展させる原動力となった．「Wheeler は量子情報科学の父ではないかもしれない．だがゴッドファーザーではあった」．Schumacher はそう話している．

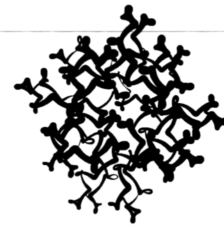
参考文献

1) W.K. Wootters and W.H. Zurek, *Physical Review* **D19** (1979) 473.

古田 彩（日本経済新聞社科学技術部）

量子状態空間の幾何学

情報幾何学の視点から



長岡 浩司

1. はじめに

何か一つのことが，ある人にとっては光り輝いて見え，ある人にとっては取り立てて興味を引かない，ということは世の中にいくらでもある．後者が多数を占めれば占めるほど，前者の人たちの中で輝きは強さと魅力を増していく．そしてときには，その輝きがその人の人生を照らし導く灯りのような役割を果たすことがある．そういう場合，その輝きをもたらしているものが何かを探っていくと，その人の子供時代や若い時期の幸せと不幸せの両方が関わっていることが多い．愛と美に満ちた幸せがあり，そこからの別離を余儀なくされた不幸せがある．ある種の学者や芸術家を突き動かしている衝動もこれと同様の輝きであろう．この場合の「幸せ」には，子供時代をその中で過ごした文化という要素が深く関わっていて，それがその輝きに普遍性と豊かさを与える．「不幸せ」のほうは，世間的な意味での不幸もあれば，未知の世界への旅立ちというような場合もある．いずれにせよ，「楽園」での生活体験とそこからの別離という両方の要素が創造活動の源になっている．このような構図はまた，個々の学者や芸術家に留まらず，学問や芸術における分野や流行，地域や国の文化や時代の流れといったものの中にも見いだすことができる．人間の創造性とか物事の認識のあり方の根幹に関係しているのだろう．

一個人の人生における学問の持つ意味を考えるとき，大学や大学院での勉強は，子供時代か，せいぜい思春期に相当する．その時期の心の動きは，明確な価値判断とは容易に相容れない混沌に特徴がある．本文を読んで下さっている学生諸氏の中に，このような混沌の中であえぎ苦しんでいる最中の方がいたら，筆者ごときが誠に僭越ではあるが，自らの学問的衝動に忠実であれと祝福をお送りしたいと思う．その苦しみは，学問の世界では幸せと呼ばれているのである．学問の未来は貴方のような人たちの見る夢の中にあるのだと筆者は信じている．そしてもう一つ，豊かな内容を誇る学問分野には，必ず先達としての楽園があり，またそれ自体が（失われた）楽園となって新たな学問への衝動を形成していく．そういう認識を持つことは，混沌の中に何らかの方向性を見出していく上で助けになるに違いない．

本稿のテーマには様々な既存の学問分野が関わっている．量子力学はもちろんのこと，微分幾何の手法と文化も不可欠であるし，統計学や確率論，情報理論とも本質的な関わりを有する．しかし，本テーマにとっての楽園は何かというと，それは古典[*1)]情報幾何学である．以下では距離とリーマン計量に話題を絞り，古典情報幾何の文化と風景をある程度ゆっくりと説明した後，その文化を通して量子力学の世界を眺めたときに見えてくる風景の一端を駆け足で追っていくことにする．

2. 量子状態空間と確率分布空間

この節では，本稿の主要舞台となる量子状態のなす空間とその古典版の定義を与える．最初に線形代数の基本事項をいくつか確認しておく．本稿では複素数 $c \in \mathbb{C}$ の共役を $\overline{c}$ と記し，行列 $A = (a_{ij})$ のエルミート共役（共役転置）を $A^* = (\overline{a_{ji}})$ と記す．正方行列に関するエルミート，半正定値，正定値，ユニタリなどの概念は既知であると仮定する．A が半正定値であることを $A \geq 0$，正定値であることを $A > 0$ と表記する．任意のエルミート行列 A は，あるユニタリ行列 U を

*1) 本稿では，量子力学を確率論の拡張体系と見なす観点に基づき，「非量子論的」＝「確率論的」という意味で「古典」という言葉を用いる．

用いて

$$A = U\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}\,U^* \qquad (1)$$

と表される．ここで $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ は $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ を対角成分とする対角行列を表す．これらの対角成分は A の固有値であり，A のエルミート性によりすべて実数になる．A のトレースは $\mathrm{Tr}\,A = \sum_{i=1}^{d} a_{ii} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ と表される．また，$A \geq 0$ および $A > 0$ は，それぞれ $\forall i, \lambda_i \geq 0$ および $\forall i, \lambda_i > 0$ という条件と同値である．

$\rho \geq 0$ かつ $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ を満たす行列 ρ を**密度行列**と呼ぶ．6 節で述べるように密度行列は量子状態の数学的表現である．$d \times d$ の密度行列全体のなす集合を $\mathcal{S}_d$ とおき，正定値の密度行列 $\rho > 0$ のなす $\mathcal{S}_d$ の部分集合を $\mathcal{S}_d^+$ と記す．

密度行列 $\rho \in \mathcal{S}_d$ はエルミート行列であるから (1) 式の形に対角化され，対角成分（固有値）$\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ は $\forall i, \lambda_i \geq 0$ および $\sum_i \lambda_i = 1$ を満たす．これは，$(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ が集合 $\{1, \ldots, d\}$ 上の確率分布をなすことを意味する．このような $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ の全体を $\mathcal{P}_d$ とおき，その中で特に $\forall i, \lambda_i > 0$ を満たすようなもののなす部分集合を $\mathcal{P}_d^+$ と表すことにする*2)．量子状態空間 $\mathcal{S}_d$（あるいは $\mathcal{S}_d^+$）は，確率分布空間 $\mathcal{P}_d$（あるいは $\mathcal{P}_d^+$）をユニタリ行列のなす集合（ユニタリ群）によって (1) 式に従ってグルッと「回転」させることによって生成されると考えることができる．

3. 確率分布空間上の距離概念について

ここからしばらくは確率分布空間 $\mathcal{P}_d$（一般には $\mathcal{P}(\mathcal{X})$）の幾何について考える．幾何学的な構造と言ってもいろいろあるが，距離概念はその代表的なものの一つである．そこで $\mathcal{P}_d$ にどのような距離が入るかを見ていこう．つまり，$\mathcal{P}_d$ の任意の 2 つの要素 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ および $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_d)$ に対し，その距離 $\delta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ をどう定めたらよいかという問題である．ただし，普通数学で距離というと，距離の公理と呼ばれる 3 つの性質（正値性，対称性，三角不等式）を満たすものを考えるが，ここではそのうちの正値性：

$$\delta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq 0, \quad \text{等号成立} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \qquad (2)$$

のみを要求する．

もちろん，単に距離というだけなら，数学的にはどんなものを導入してもよいのだが，$\mathcal{P}_d$ が確率分布の集合であるという特性を考慮したとき，どんな距離が自然であるかということに興味がある．確率分布とは，それが従う確率変数を何度も独立に観測したときに現れる統計性を表現したものである．したがって，距離 $\delta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の統計性がどれぐらい隔たっているかということを自然に表す量であってほしい．例えば，観測データが $\boldsymbol{p}$ か $\boldsymbol{q}$ のどちらか一方（＝真の分布）に従って生じるという状況において，データだけを見てどちらが真の分布であるかを識別するという問題を考えると，この統計性の隔たりが大きければ精度の高い識別が可能であり，隔たりが小さければそれは難しくなるだろう．よって，距離 $\delta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ は何らかの意味で $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の識別のしやすさを表すものであってほしい．こうして，確率分布空間の幾何学は統計的推測問題とも密接に関連することになる．が，これについてはもう少し後で論じることにして，以下では分布空間上の距離が持つべき「不変性」について考えていく．

$d = 2$ の場合，2 つの分布 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ と $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ の間の相対的な関係と，それらの成分の順序を変えてできる $\boldsymbol{p}' = (p_2, p_1)$ と $\boldsymbol{q}' = (q_2, q_1)$ の間の関係は全く対等と考えるのが自然である．この対等関係を

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \simeq (\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}') \qquad (3)$$

と記そう．一般の $\mathcal{P}_d$ についても，2 つの分布 $\boldsymbol{p} = (p_i)$ と $\boldsymbol{q} = (q_i)$ の間の関係と，$\{1, \ldots, d\}$ 上の任意の置換 s によって成分を並べ替えてできる $\boldsymbol{p}' = (p_{s(i)})$ と $\boldsymbol{q}' = (q_{s(i)})$ の間の関係は対等であると考え，(3) 式のように記すことにする．$\mathcal{P}_d$ 上の距離に対し，この対等関係の下での不変性 $\delta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \delta(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}')$ を要請しよう．

例えば，数ベクトル空間の通常のユークリッド距離 $\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\|$ はこの要請を満たす．式を簡単にするために，ここでは $\delta_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\|^2 = \sum_{i=1}^{d} (p_i - q_i)^2$ を考える．これは一見，自然な距離に思われるが，実は以下に見るように確率分布の距離としては「失格」である．

今，$\mathcal{P}_2$ の 4 つの要素 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}$ を任意に取り，これらの成分を用いて $\mathcal{P}_4$ の 2 つの要素

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = (p_1 r_1^{(1)}, p_1 r_2^{(1)}, p_2 r_1^{(2)}, p_2 r_2^{(2)}),$$
$$\widetilde{\boldsymbol{q}} = (q_1 r_1^{(1)}, q_1 r_2^{(1)}, q_2 r_1^{(2)}, q_2 r_2^{(2)})$$

を定めたとする．$\widetilde{\boldsymbol{p}}$ の成分 $p_i r_j^{(i)}$ は，まず $i \in \{1, 2\}$ が確率分布 $\boldsymbol{p}$ に従って生じ，ついで $j \in \{1, 2\}$ が確率分布 $\boldsymbol{r}^{(i)}$ に従って生じる，という場合の $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ の確率を表す．このことを

$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{p}}} \sim (i, j) \iff \boxed{\boldsymbol{p}} \sim i \to \boxed{\boldsymbol{r}^{(i)}} \sim j$$

*2) 一般の有限集合 $\mathcal{X}$ 上の確率分布の集合についても $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ と $\mathcal{P}^+(\mathcal{X})$ という記号を導入しておく．特に $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}(\{1, \ldots, d\})$, $\mathcal{P}_d^+ = \mathcal{P}^+(\{1, \ldots, d\})$ となる．

と表そう．同様に，$\widetilde{\boldsymbol{q}}$ は

$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{q}}} \sim (i,j) \iff \boxed{\boldsymbol{q}} \sim i \to \boxed{\boldsymbol{r}^{(i)}} \sim j$$

と表される．データ (i,j) を通して分布 $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ と $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ の違いを比較しようとするとき，j はあってもなくても同じであり，i を通して $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の違いを比較するのと本質的に同等なことが見て取れるだろう*3)．そこで，この場合にも $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の間の関係と $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ と $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ の間の関係は対等であると考え，

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \simeq (\widetilde{\boldsymbol{p}},\widetilde{\boldsymbol{q}}) \tag{4}$$

と表すことにする．すると，分布間の距離についても不変性 $\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \delta(\widetilde{\boldsymbol{p}},\widetilde{\boldsymbol{q}})$ が要請されることになるが，δ_{E} はこれを満たさない*4)．

(3) や (4) の対等関係の下で不変な距離は，実は無数にある．例えば $\delta_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{d} |p_i - q_i|$ や $\delta_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{d} (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2$ などがその例である．$\delta_{\mathrm{V}}, \delta_{\mathrm{H}}$ はそれぞれ変動距離（L^1-距離），Hellinger 距離などと呼ばれる．また，非対称な距離の例としては

$$\delta_{\mathrm{rel}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{d} p_i \log(p_i/q_i) \tag{5}$$

というものがある．この距離は確率論，統計学，統計力学，情報理論など様々な分野で重要な役割を果たし，**相対エントロピー**，**Kullback-Leibler 情報量**，**ダイバージェンス**など多くの呼称を持つ．さらにこれらをすべて包含する一般的な距離として，**f-ダイバージェンス** $\delta_f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{d} p_i f(q_i/p_i)$ というものが知られている（Csiszár, 1967）．ここで f は $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ を定義域とする凸関数（下に凸）で $f(1)=0$ を満たすものとする．$f(x)$ として $|x-1|, 2(1-\sqrt{x}), -\log x$ を取れば $\delta_{\mathrm{V}}, \delta_{\mathrm{H}}, \delta_{\mathrm{rel}}$ が得られる．

4. 不変性と単調性

(3) と (4) で例示した対等関係を一般的に定式化しておこう．$\mathcal{X},\mathcal{Y}$ を任意の有限集合とし，$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ の要素 (x,y) を実数 $W(y\,|\,x)$ に対応させる写像 W が与えられたとする．$W(y\,|\,x)$ が条件付き確率分布の身分を持つとき，即ち $\forall x,y$ に対し $W(y\,|\,x) \geq 0$ および $\sum_{y\in\mathcal{Y}} W(y\,|\,x) = 1$ が成り立つとき，W を $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への**通信路**（channel）と呼ぶ．通信路 W が与えられたとき，$\mathcal{X}$ 上の確率分布 $\boldsymbol{p}$ に対し $p'(y) = \sum_{x\in\mathcal{X}} W(y\,|\,x)p(x)$ によって $\mathcal{Y}$ 上の確率分布 $\boldsymbol{p}'$ が定まる．これを $\boldsymbol{p}' = \Gamma_W(\boldsymbol{p})$ と表すことにする．$\boldsymbol{p}$ と $\Gamma_W(\boldsymbol{p})$ の関係は次の図式で表される．

$$\boxed{\boldsymbol{p}} \sim x \to \boxed{W(\cdot\,|\,x)} \sim y \implies \boxed{\Gamma_W(\boldsymbol{p})} \sim y$$

一般に，写像 $\Gamma : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ がある通信路 W を用いて $\Gamma = \Gamma_W$ と表されるとき，Γ を**マルコフ写像**と呼ぶ．$\mathcal{X}$ 上の分布のペア $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ と $\mathcal{Y}$ 上の分布のペア $(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')$ に対し，$\boldsymbol{p}' = \Gamma(\boldsymbol{p})$ かつ $\boldsymbol{q}' = \Gamma(\boldsymbol{q})$ を満たすマルコフ写像 Γ が存在するとき $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \succeq (\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')$ と表し，さらに $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \succeq (\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')$ と $(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}') \succeq (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ の両方が成り立つとき $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \simeq (\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')$ と表すことにする．これは (3) や (4) の一般化になっている*5)．

確率分布空間上の距離 δ に対し，

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \succeq (\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}') \Rightarrow \delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq \delta(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}') \tag{6}$$

が常に成り立つ，という性質を δ の**単調性**と呼ぶ．単調性が成り立てば，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \simeq (\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}') \Rightarrow \delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \delta(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')$ という**不変性**が成り立つことは明らかである．先に導入した f-ダイバージェンス δ_f はすべて単調性を満たし，したがって不変な距離になっている．これ以外にも例えば，**Chernoff 距離**と呼ばれる

$$\delta_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = -\log \min_{0\leq s\leq 1} \sum_{i=1}^{d} p_i^s q_i^{1-s} \tag{7}$$

は単調性を満たす距離となる．

x の分布 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ を通信路 $W(y\,|\,x)$ によって y の分布 $\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}'$ に変換したとき，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の統計性に関する隔たりが W を通すことで「ぼやけて」互いの識別がしにくくなることはあっても，その逆はあり得ない．この観点から，単調性は確率分布空間の距離が持っていてほしい基本性質と言える．さらに，実際に統計的識別の精度と解釈できる距離もあり，その場合には，単調性はその解釈から自明に導かれる*6)．δ_{rel} や δ_{C} がその例である．これに関してはその量子版について述べるところで再び触れる．

5. フィッシャー計量

前節では単調性を満たす距離がたくさんあるという

*3) この状況を統計学では「i は分布族 $\{\widetilde{\boldsymbol{p}},\widetilde{\boldsymbol{q}}\}$ に関する十分統計量である」と言い表す．

*4) 例えば $\boldsymbol{p} = (0,1), \boldsymbol{q} = (1,0), \boldsymbol{r}^{(1)} = \boldsymbol{r}^{(2)} = (0.5, 0.5)$ とおくと，$\delta_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 2 \neq \delta_{\mathrm{E}}(\widetilde{\boldsymbol{p}},\widetilde{\boldsymbol{q}}) = 1$．

*5) (4) の場合，$\{1,2\}$ から $\{1,2\}^2$ への通信路 W と逆向きの通信路 V を $W(i,j\,|\,i) = r_j^{(i)}$ および $V(i\,|\,i,j) = 1$ によって定めると，Γ_W および Γ_V によって $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ と $\widetilde{\boldsymbol{p}},\widetilde{\boldsymbol{q}}$ が互いに対応する．

*6) ただし，その解釈を与える定理の証明中で単調性が使われていることもあり，単調性の別証明と考えるのは早計である．

ことを述べた．しかし，分布どうしが非常に近い場合の主要項のみに注目すると，状況は一変する．以下では $\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ として変数 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ に関して滑らか（何回でも微分可能）であるようなものだけを考える．δ_f の場合は凸関数 f に滑らかさが要請され，δ_{V} などが排除される．また，$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ の境界上では微分操作が自由にできなくなるので，$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ は $\mathcal{P}^+ := \mathcal{P}^+(\mathcal{X})$ 内を動くものとする*7)．$\mathcal{P}^+$ 上の滑らかな曲線（1 次元分布族）$\{\boldsymbol{p}_t\,;\,t\in T\}\subset\mathcal{P}^+$ （T は $\mathbb{R}$ の開区間）に対し，$|\Delta t|$ が十分に小さいとして $\delta(\boldsymbol{p}_t,\boldsymbol{p}_{t+\Delta t})$ を Δt に関して 2 次までのテイラー展開で近似することを考えると，正値性 (2) により 0 次と 1 次の係数は消えて

$$\delta(\boldsymbol{p}_t,\boldsymbol{p}_{t+\Delta t}) \fallingdotseq a(t)\,(\Delta t)^2 \tag{8}$$

と表される．δ_f の場合について $a(t)$ を計算してみると，

$$g(t)=\sum_{x\in\mathcal{X}} p_t(x)\left\{\frac{d}{dt}\log p_t(x)\right\}^2 \tag{9}$$

という量を用いて $a(t)=\frac{f''(1)}{2}g(t)$ （f'' は f の 2 階微分）と表される．即ち，定数倍の違いを除けば，$\delta(\boldsymbol{p}_t,\boldsymbol{p}_{t+\Delta t})$ は f の取り方に依らず $g(t)(\Delta t)^2$ で近似されるのである．さらに Chernoff 距離 δ_{C} についても $a(t)=\frac{1}{4}g(t)$ が成り立つ．

$g(t)$ は 1 次元分布族 $\{\boldsymbol{p}_t\,;\,t\in T\}$ の**フィッシャー情報量**と呼ばれる．上記の観察からすると，無限小だけ離れた $\boldsymbol{p}_t$ と $\boldsymbol{p}_{t+dt}$ の距離を

$$\delta(\boldsymbol{p}_t,\boldsymbol{p}_{t+dt})=g(t)(dt)^2 \tag{10}$$

という量で測ることには何か普遍的な意味がありそうだ．この測り方を $\mathcal{P}^+$ 全体の構造として理解するために，$\mathcal{P}^+$ に座標系 $\theta=(\theta^1,\ldots,\theta^m)$ を適当に導入し，それによって $\mathcal{P}^+=\{\boldsymbol{p}_\theta\,|\,\theta\in\Theta\}$ とパラメータ表示したとしよう．ここで Θ は $\mathbb{R}^m$ の開集合であり，$\boldsymbol{p}_\theta$ は θ に関して滑らかであると仮定する．m は多様体 $\mathcal{P}^+$ の次元であり，$\mathcal{X}$ の要素数が d ならば $m=d-1$ となる．このとき $\boldsymbol{p}_t=\boldsymbol{p}_{\theta(t)}$ の形で書け，そのフィッシャー情報量は $g(t)=\sum_{i,j}g_{ij}(\theta)\frac{d\theta^i}{dt}\frac{d\theta^i}{dt}$ と表される．ただし $g_{ij}(\theta)$ は

$$g_{ij}(\theta)=\sum_{x\in\mathcal{X}}p_\theta(x)\partial_i\log p_\theta(x)\partial_j\log p_\theta(x) \tag{11}$$

（$\partial_i := \partial/\partial\theta^i$）で定義される．$G_\theta := (g_{ij}(\theta))$ は $m\times m$ 実対称正定値行列となり，$\mathcal{P}^+$ の（座標系 (θ^i) に関する）**フィッシャー情報行列**と呼ばれる．こうして，(10) の距離尺度は $\mathcal{P}^+$ 上で

$$\delta(\boldsymbol{p}_\theta,\boldsymbol{p}_{\theta+d\theta})=\sum_{i,j}g_{ij}(\theta)d\theta^i d\theta^i \tag{12}$$

と表される．この式は $d\theta$ に関する 2 次形式であるから，数学的身分としては距離の 2 乗に相当する．一般に，多様体 S において無限小だけ離れた 2 点の距離の 2 乗を (12) 式の形で定めるとき，S 上にリーマン計量が一つ与えられたと言い表し，$g_{ij}(\theta)$ をそのリーマン計量の座標系 (θ^i) に関する成分と呼ぶ．ここで導入した $\mathcal{P}^+$ 上のリーマン計量は**フィッシャー計量**と呼ばれる．

単調性を満たす距離の無限小近似として得られるフィッシャー計量は，それ自身，単調性*8)と，その必然的な帰結である不変性を満たす．実は，このような不変性を満たす確率分布空間上のリーマン計量はフィッシャー計量かその定数倍しかない，という定理がある (Chentsov, 1972)．これによって，単調性（あるいは不変性）を満たす滑らかな距離の無限小近似 (8) は，定数倍の違いを除いてすべて一致することが帰結される．

フィッシャー情報量（情報行列）は元々統計的推定理論の中で見出された概念である．推定理論の基本定理の一つとも言えるクラメル・ラオの不等式およびその漸近版（観測データ数を大きくしていったときの極限）によれば，フィッシャー情報量の逆数やフィッシャー情報行列の逆行列には推定誤差の原理的限界という意味が与えられる．この意味づけにより，フィッシャー計量の単調性は，何らかの通信路を通して変換されたデータを用いてパラメータ推定を行った場合，変換する前の原データを用いた（最適な）推定に比べて推定精度が改善されることはあり得ない，という当然の事実を反映したものであると解釈される．

6. 量子力学における状態，測定，合成系

本節では後の議論に必要となる量子力学の基本的枠組みについて一通り説明しておく．量子力学では一つの物理系を記述しようとするとき，まずそこにヒルベルト空間という数学的舞台を設定する．ヒルベルト空間とは（完備な）内積が与えられた複素線形空間のことを言う．例えば，複素数を成分とする d 次元縦ベクトルの全体を $\mathbb{C}^d$ と表し，2 つのベクトル $\psi=(x_i),\varphi=(y_i)\in\mathbb{C}^d$ に対する内積を $\langle\psi,\varphi\rangle=\sum_{i=1}^d\overline{x_i}\,y_i=\psi^*\varphi$ （ψ^* は

*7) 微分幾何の用語を用いると，$\mathcal{P}^+$ は多様体になるが $\mathcal{P}$ のほうはそうはならない，ということが重要である．

*8) 任意の $\{\boldsymbol{p}_t\}$ をマルコフ写像によって $\boldsymbol{p}'_t=\Gamma(\boldsymbol{p}_t)$ と変換したとき，$\{\boldsymbol{p}_t\}$ と $\{\boldsymbol{p}'_t\}$ のフィッシャー情報量の間に $g(t)\ge g'(t)$ $(\forall t\in T)$ が成立する（直接証明も易しい）．

$\overline{x_i}$ を成分とする横ベクトル）で定めるとき，$\mathbb{C}^d$ はヒルベルト空間となる．一般のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素（$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ 自身への線形写像）についても，行列の場合と同様にエルミート共役，(半) 正定値，トレースなどの概念が定義され，半正定値でトレース 1 の作用素として密度作用素が定義される．$\mathcal{H}$ 上の密度作用素の全体を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$，正定値密度作用素の全体を $\mathcal{S}^+(\mathcal{H})$ と記すことにする．$\mathcal{H}=\mathbb{C}^d$ の場合が先に定義した $\mathcal{S}_d, \mathcal{S}_d^+$ である．

一つの物理系は，それがどのような状況で用意されるかということに依存して様々な状態を取り得る．系を記述するヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が定まったとき，状態は $\mathcal{H}$ 上の密度作用素によって表現される．多くの重要な物理系で $\mathcal{H}$ は無限次元空間になるが，以下では $\dim\mathcal{H}=d<\infty$ と仮定して議論を進める．この場合には，$\mathcal{H}$ の正規直交基底を一つ定めれば $\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}^d$ と同一視することができ，その量子系のあらゆる可能な状態を集めてできる集合が $\mathcal{S}_d$ になる．

測定結果が $1,2,\ldots,K$ の K 通りあるような測定が一つ指定されているとし，それを $\mathfrak{M}$ と名づけたとしよう．状態 $\rho\in\mathcal{S}_d$ のもとで測定 $\mathfrak{M}$ を行ったとき，k 番目の測定結果が得られる確率は

$$P_\rho^{\mathfrak{M}}(k)=\mathrm{Tr}\,(\rho M_k),\quad 1\le k\le K \qquad (13)$$

という形で表される．ここで $\{M_1,\ldots,M_K\}$ は $\mathfrak{M}$ に依存して定まる $d\times d$ 行列の集まりであり，

$$\forall k,\ M_k\ge 0\ \text{かつ}\ \sum_{k=1}^{K} M_k=I\ (\text{単位行列})$$

を満たす．一般に，上式を満たす行列の集まり $\{M_k\}$ を **POVM** (Positive Operator-Valued Measure) と呼ぶ．POVM $\{M_k\}$ は，測定 $\mathfrak{M}$ の持つ様々な側面のうち「測定結果の統計性」を表現したものであり，この側面のみに関心がある場合には $\mathfrak{M}=\{M_k\}$ と同一視してよい．

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ と $\mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ で表される 2 つの量子系 I と II があったとき，それらの合成系 I + II を表すヒルベルト空間は $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ と $\mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ のテンソル積空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}\otimes\mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ と呼ばれるものになる．$\mathcal{H}_{\mathrm{I}}=\mathbb{C}^{d_{\mathrm{I}}}, \mathcal{H}_{\mathrm{II}}=\mathbb{C}^{d_{\mathrm{II}}}$ の場合には $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}\otimes\mathcal{H}_{\mathrm{II}}=\mathbb{C}^{d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{II}}}$ となり，合成系の状態は $\mathcal{S}_{d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{II}}}$ の要素で表される．特に，系 I と系 II がそれぞれ独立に状態 ρ_{I} と ρ_{II} におかれているという状況に対応する合成系の状態は，ρ_{I} の (i,j) 成分を r_{ij} とおくとき，

$$\rho_{\mathrm{I}}\otimes\rho_{\mathrm{II}}:=\begin{pmatrix} r_{11}\rho_{\mathrm{II}} & \cdots & r_{1d_{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{II}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{d_{\mathrm{I}}1}\rho_{\mathrm{II}} & \cdots & r_{d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

という密度行列で表される．このことは，確率論で言うと，$\mathcal{X}=\{1,\ldots,d_{\mathrm{I}}\}$ と $\mathcal{Y}=\{1,\ldots,d_{\mathrm{II}}\}$ の直積 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上の確率分布（同時確率分布）の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ は $\mathcal{P}_{d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{II}}}$ と同一視でき，2 つの系が独立に $\boldsymbol{p}_{\mathrm{I}}=(p_{\mathrm{I}}(x))\in\mathcal{P}_{d_{\mathrm{I}}}$ と $\boldsymbol{p}_{\mathrm{II}}=(p_{\mathrm{II}}(y))\in\mathcal{P}_{d_{\mathrm{II}}}$ に従うという状況は積分布 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{p}_{\mathrm{II}}=(p_{\mathrm{I}}(x)p_{\mathrm{II}}(y))\in\mathcal{P}_{d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{II}}}$ で表される，という事実に対応する．

確率論において同時確率分布 $p(x,y)$ から x や y の周辺確率分布が $p(x)=\sum_y p(x,y)$ 等によって定まるように，量子力学においても合成系の状態から部分系の状態が定まる．合成系の状態 $\rho_{\mathrm{I+II}}\in\mathcal{S}_{d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{II}}}$ が $d_{\mathrm{II}}\times d_{\mathrm{II}}$ 行列 R_{ij} を用いて

$$\rho_{\mathrm{I+II}}=\begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1d_{\mathrm{I}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{d_{\mathrm{I}}1} & \cdots & R_{d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{I}}} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

と分割表示されるとき，部分系 I の状態は $r_{ij}:=\mathrm{Tr}\,R_{ij}$ を (i,j) 成分とする行列 $\rho_{\mathrm{I}}=(r_{ij})$ で与えられ，部分系 II の状態は $\rho_{\mathrm{II}}=\sum_{i=1}^{d_{\mathrm{I}}}R_{ii}$ で定まる．

7. 量子通信路

d, d' を 2 以上の任意の自然数とし，$d'\times d$ 行列の集まり $\{A_1,\ldots,A_J\}$ $(J\ge 1)$ が

$$\sum_{j=1}^{J} A_j^*A_j=I \quad (d\ \text{次単位行列}) \qquad (16)$$

を満たしているとする．このとき，任意の $\rho\in\mathcal{S}_d$ に対し

$$\Gamma(\rho)=\sum_{j=1}^{J} A_j\rho A_j^* \qquad (17)$$

とおくと $\Gamma(\rho)\in\mathcal{S}_{d'}$ が成り立つ．一般に，写像 $\Gamma:\mathcal{S}_d\to\mathcal{S}_{d'}$ が (16) 式を満たす $\{A_j\}$ を用いて (17) 式の形に表されるとき，Γ を**量子通信路**あるいは**量子操作** (quantum operation) と呼ぶ．

マルコフ写像（古典通信路と同等）はデータの変換によって引き起こされる確率分布の変換を一般的に表す数学的概念である．「データの変換」を「物理的な操作」という言葉で置き換えたとき，量子状態の変換を一般的に表す数学的概念が量子通信路である．その理由を限られた紙面で説明することは難しいが，とりあえず (17) 式をもう少し「物理的な」形に書き直してみよう．まず $A_1,\ldots,A_J$ を縦に並べてできる $Jd'\times d$ 行列を V とおくと，(16) 式は $V^*V=I$ と表される．V を $\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^{Jd'}$ なる線形写像と考えるとき，こ

の式は等長性 $\|V\psi\| = \|\psi\|$ $(\forall\psi \in \mathbb{C}^d)$ を意味する．$V\rho V^*$ は密度行列になり，$\mathcal{S}_{Jd'}$ を $\mathcal{S}(\mathbb{C}^J \otimes \mathbb{C}^{d'})$ と同一視することにより，$\mathcal{H}_{\mathrm{I}} = \mathbb{C}^J$ と $\mathcal{H}_{\mathrm{II}} = \mathbb{C}^{d'}$ からなる合成系の状態と見なせる．$\rho_{\mathrm{I+II}} := V\rho V^*$ を (15) 式のように分割表示すると $R_{ij} = A_i \rho A_j^*$ となり，部分系 $\mathbb{C}^{d'}$ の状態が $\rho_{\mathrm{II}} = \sum_i R_{ii} = \Gamma(\rho)$ となる．

整理すると，任意の量子通信路 Γ は $\rho \to V\rho V^* = \rho_{\mathrm{I+II}} \to \rho_{\mathrm{I}} = \Gamma(\rho)$ というように等長写像と部分系への制限という 2 つの操作の組合せによって表される．等長写像は，与えられた系をより大きな系の一部として捉え直す過程やシュレーディンガー方程式に従って時間発展する場合の状態変化などを一般的に表していると考えられ，部分系への制限と合わせて，量子通信路の原理的な実現可能性を示していると言える．なお，本稿では触れないが，量子通信路は**完全正** (completely positive) という極めて重要な性質によって特徴づけられることを付記しておく．

8. 量子状態空間上の距離と状態識別について

古典的な場合にならい，$\rho, \sigma \in \mathcal{S}_d$ および $\rho', \sigma' \in \mathcal{S}_{d'}$ に対し，$\Gamma(\rho) = \rho'$ かつ $\Gamma(\sigma) = \sigma'$ を満たす量子通信路 Γ が存在するとき $(\rho, \sigma) \succeq (\rho', \sigma')$ と表す．関係 $\succeq$ の下での単調性を満たす距離は古典系の場合と同様（あるいはそれ以上に）たくさん存在する．例えば，δ_{rel} の量子版としてよく知られている**量子相対エントロピー**

$$\delta_{\mathrm{Qrel}}(\rho, \sigma) = \mathrm{Tr}\, \rho(\log \rho - \log \sigma) \tag{18}$$

や**量子 Chernoff 距離**

$$\delta_{\mathrm{QC}}(\rho, \sigma) = -\log \min_{0 \le s \le 1} \mathrm{Tr}\, \rho^s \sigma^{1-s} \tag{19}$$

がその例である*9)．δ_{Qrel} や δ_{QC} は以下に述べるように状態識別問題と直接の関わりを持つ．

今，同一のヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ で表される量子系が n 個用意されており，それらが互いに独立に同じ状態 $\rho \in \mathcal{S}_d$ に置かれているとする．この状況を一つの合成系として捉えると，ヒルベルト空間は $\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H} = \mathbb{C}^{d^n}$，状態は $\rho^{\otimes n} = \rho \otimes \cdots \otimes \rho \in \mathcal{S}_{d^n}$ で表される．これは古典系で i.i.d. (independent and identically distributed) と呼ばれる状況に対応しており**量子 i.i.d.** などと呼ばれる．

ここで，量子 i.i.d. であることは分かっているが，その状態の候補として $\rho^{\otimes n}$ と $\sigma^{\otimes n}$ の 2 つがあり，どちらが本当の状態であるかを何らかの測定に基づいて識別（推定）したいという問題を考える．このような識別は一般に $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の 2 値の POVM $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2\}$ で表すことができる．M_1, M_2 は $M_1 + M_2 = I$ を満たす $d^n \times d^n$ の半正定値行列であり，測定結果 1, 2 はそれぞれ，真の状態が $\rho^{\otimes n}$ であるという推測と $\sigma^{\otimes n}$ であるという推測を表すものとする．このような識別を行ったときの精度は，本当は $\rho^{\otimes n}$ だったのに $\sigma^{\otimes n}$ と誤って推測してしまう確率 $P^{\mathfrak{M}}_{\rho^{\otimes n}}(2)$ と逆の状況の確率 $P^{\mathfrak{M}}_{\sigma^{\otimes n}}(1)$ で評価することができる．これらの誤り確率は互いにトレードオフの関係にあり，両方を同時に最小とするような $\mathfrak{M}$ は存在しない．そこで次のような量を考えよう．

$$\alpha_n(\epsilon) := \min_{\mathfrak{M}:\, P^{\mathfrak{M}}_{\rho^{\otimes n}}(2) \le \epsilon} P^{\mathfrak{M}}_{\sigma^{\otimes n}}(1)$$

$$\beta_n := \min_{\mathfrak{M}} \left\{ P^{\mathfrak{M}}_{\rho^{\otimes n}}(2) + P^{\mathfrak{M}}_{\sigma^{\otimes n}}(1) \right\}$$

このとき次が成り立つ．

$$\delta_{\mathrm{Qrel}}(\rho, \sigma) = -\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_n(\epsilon) \tag{20}$$

$$\delta_{\mathrm{QC}}(\rho, \sigma) = -\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n \tag{21}$$

ただし最初の式は $0 < \forall\epsilon < 1$ に対して成立する．これらの式の右辺は，$n \to \infty$ において $\alpha_n(\epsilon)$ と β_n が 0 に収束する際の速度を表し，状態識別精度の指標の一種と見なすことができる．

(20) と (21) の古典版はそれぞれ Stein の補題，Chernoff の定理と呼ばれており，1950 年代に確立された．古典版と量子版は，その問題設定も定理の等式もほとんど同じ形で表されるが，証明は量子版になると格段に難しくなる．(20) 式は Hiai-Petz (1991) と Ogawa-Nagaoka (2000) によって，(21) 式はつい最近登場した 2 つの論文*10) によってそれぞれ証明が与えられた．

9. 量子状態空間上の単調計量

古典系の場合，単調性を満たす $\mathcal{P}_d^+$ 上のリーマン計量はフィッシャー計量かその定数倍に限られた．量子

*9) 一般にエルミート行列 A が (1) 式の形に対角化されているとき，固有値 $\{\lambda_j\}$ を含む区間上で定義された連続関数 f に対し，エルミート行列 $f(A)$ を $f(A) = U\, \mathrm{diag}\{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_d)\}\, U^*$ で定義する．$\log \rho$ や ρ^s は $f(x) = \log x$ や $f(x) = x^s$ の場合に相当する．

*10) M. Nussbaum and A. Szkola, "The Chernoff lower bound for symmetric quantum hypothesis testing," to appear, *Ann. Statist.* および K.M.R. Audenaert, et al., "The quantum Chernoff bound," *Phys. Rev. Lett.*, 98, 160501, 2007.

系では，（量子通信路の下での）単調性を満たす $\mathcal{S}_d^+$ 上のリーマン計量（**単調計量**と呼ぶ）は無数に存在する．

準備を少々．区間 W を定義域とする関数 $f: W \to \mathbb{R}$ を考える．W に固有値が含まれるような任意の 2 つのエルミート行列 A, B に対し，$A - B \geq 0 \Rightarrow f(A) - f(B) \geq 0$（$\geq 0$ は半正定値の意）が常に成り立つとき，f を**作用素単調関数**と呼ぶ．作用素単調関数は普通の意味で単調増加（非減少）になるが，逆は成り立たない[*11]．

Petz (1996) によれば，量子系の単調計量は，

$$xf(1/x) = f(x), \quad \forall x > 0 \tag{22}$$

を満たす作用素単調関数 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ と一対一に対応する．f からどのようにしてリーマン計量が定まるかという手順をできるだけ初等的に説明してみよう．以下では 1 次元状態族 $\{\rho_t \mid t \in T\}$ に対して (9) 式の $g(t)$ に相当するものを構成する．まず ρ_t の対角化 $\rho_t = U_t \Lambda_t U_t^*$, $\Lambda_t = \mathrm{diag}\{\lambda_{t,1}, \ldots, \lambda_{t,d}\}$ から出発し，$X_t := U_t^*(\partial_t \rho_t) U_t$ とおく．ただし $\partial_t := \frac{d}{dt}$ である．次に X_t の (i,j) 成分を x_{ij} とおき，$y_{ij} := x_{ij}/f(\lambda_i/\lambda_j)$ を (i,j) 成分とする行列 Y_t を定める．さらに $L_t = U_t Y_t \Lambda_t^{-1} U^* = U_t Y_t U_t^* \rho_t^{-1}$ とおく．L_t は仮定 (22) の下でエルミート行列になる．最後に

$$g(t) = \mathrm{Tr}\,(\partial_t \rho_t) L_t \tag{23}$$

と定める．この $g(t)$ はフィッシャー情報量の量子版と見なせ，$\mathcal{S}_d^+$ 上の単調計量を定める．逆に，任意の単調計量は，(22) を満たすある作用素単調関数 f を用いて上記のように構成される．

(9) 式を $g(t) = \sum_x \partial_t p_t(x) \partial_t \log p_t(x)$ と表して (23) と比較すると，L_t は古典系の場合の $\partial_t \log \boldsymbol{p}_t$ に対応していることが分かる．L_t をその単調計量に関する ρ_t の対数微分と呼ぶ．特に，ρ_t の変化が「固有値方向」に限定されていて U_t が t に依存しない場合には，$X_t = \partial_t \Lambda_t$, $Y_t = \frac{1}{f(1)} X_t$ より $L_t = \frac{1}{f(1)} U(\partial_t \log \Lambda_t) U^*$ と表され，$g(t)$ は固有値のなす確率分布族 $\{\boldsymbol{\lambda}_t\}$ のフィッシャー情報量の $\frac{1}{f(1)}$ 倍に一致する[*12]．

単調計量の例をいくつか示しておこう[*13]．まず，$f(x) = (1 + x)/2$ に対応した計量として **SLD 計量**というものがある．この場合の対数微分は $\partial_t \rho_t = \frac{1}{2}(\rho_t L_t + L_t \rho_t)$ の解として与えられる．一方 $f(x) = 2x/(x + 1)$ から定まる計量は**実 RLD 計量**と呼ばれ，対数微分は $L_t = \frac{1}{2}\left\{\rho_t^{-1}(\partial_t \rho_t) + (\partial_t \rho_t)\rho_t^{-1}\right\}$ で与えられる．これらの計量は，1970 年代前後に Helstrom, Holevo, Yuen, Lax と言った人たちが量子状態推定におけるクラメル・ラオ型不等式を定式化した際，フィッシャー情報量に相当する概念として導入した[*14]．$f(x) = (x - 1)/\log x$ に対応して得られる **BKM 計量**では，対数微分は $L_t = \partial_t \log \rho_t$ となり，さらに δ_{Qrel} に対して (8) 式の近似を考えたときの係数 $a(t)$ と $a(t) = \frac{1}{2} g(t)$ の関係で結ばれる．

上記の 3 つの例ではすべて $f(1) = 1$ が成り立っており，固有値方向の変化についてはフィッシャー計量とぴったり一致する．このような単調計量の中で，SLD 計量は最小，実 RLD 計量は最大となることが Petz によって示されている．

10. 補足および文献について

本稿では距離とその無限小版であるリーマン計量についてのみ論じたが，情報幾何ではこれ以外にアフィン接続の概念も重要である．特に，相対エントロピー $\delta_{\mathrm{rel}}, \delta_{\mathrm{Qrel}}$ の幾何は，フィッシャー計量あるいは BKM 計量とともに，これらの計量を介して互いに双対的な関係にある 2 つの平坦接続を登場させて初めて完結する．これらを含めて，情報幾何やその量子版の詳細については Amari-Nagaoka[1)] や長岡[2)] を参照願いたい．また，量子状態の識別や推定を含む量子情報理論全般に関する定評ある教科書として Hayashi[3)] をあげておく．

参考文献

1) S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, AMS/OUP, 2000 ／甘利・長岡，『情報幾何の方法』，岩波書店，1993.

2) 長岡浩司，『量子情報幾何の世界』，電子情報通信学会論文誌 A, J88-A, no.8, pp.874–885, 2005.

3) M. Hayashi, *Quantum Information: An Introduction*, Springer, 2006 ／林正人，『量子情報理論入門』，サイエンス社，2004.

（ながおか・ひろし，電気通信大学大学院情報システム学研究科）

*11) 例えば $f(x) = x^s$ $(s > 0)$ という関数を考えると，$0 \leq s \leq 1$ の場合には作用素単調になるが $s > 1$ の場合はそうはならない．

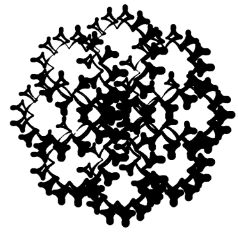
*12) これは Chentsov の定理の現れとも考えられる．

*13) 以下で登場する SLD, RLD, BKM は，それぞれ symmetric logarithmic derivative, right logarithmic derivative, Bogoliubov-Kubo-Mori の略である．

*14) RLD については，推定論的に重要なのは「実」ではなく「複素」計量であるが詳細は省略する．

量子エンタングルメントの数理

群論を使ってエンタングルメントを測ろう



杉田　歩

1. はじめに

量子コンピュータや量子暗号の話題は最近ではマスメディアでも取り上げられるほど一般的になっているので，その中にキーワードとして出てくる「エンタングルメント」という言葉は，物理系の学生なら聞いたことがあると思う[*1)]．エンタングルメントとは，一言で言えば，古典的な考え[*2)]では理解できない量子系特有の強い相関のことである．この量子系独特の性質をうまく使うことで古典的な情報処理の限界を越えようというのが量子情報理論の中心にある考えで，現在ではエンタングルメントは量子情報処理の本質的なリソース（資源）として認識されている[*3)]．

さて，エンタングルメントが重要な資源であるのならば，その資源がどれくらいあるのか知りたいと思うのは当然である．本稿では，与えられた量子状態に対して，その状態が持つエンタングルメントの大きさを示す量（測度，measure）をどう定義したらいいだろうか，という問題を取り上げる．特に，多体系においては様々な質的に異なるエンタングルメントを特徴付ける複数の量が必要になるので，様々な measure を系統的に生成する方法があれば嬉しい．ここでは，群論を使って系統的に measure を生成する方法を紹介しよう[2)]．群論とは言っても，本稿では基本的に $SU(2)$ の表現論（量子力学の角運動量の話）しか使わない．量子力学を学んだ学部学生なら無理なく読めるものを目指して書いたので，気楽に読んでほしい．

*1）ちなみに，1990 年大学入学の筆者の学部学生時代には，全く一般的な言葉ではなかった．量子情報関連の研究が爆発的に盛んになるのは，1994 年の Peter Shor による因数分解アルゴリズムの発表以降である．

*2）正確には，局所実在論と言うべきである．教科書[1)]の 8 章に分かりやすい解説がある．

*3）エネルギー，エントロピーに次ぐ第三のリソースと言われることもあるようだ．

2. 分解できる？ できない？

まず，最も簡単な例として 2 スピン系を考えよう．量子情報の世界の習慣に従い，スピン上向きと下向きの状態をそれぞれ $|0\rangle$, $|1\rangle$ と書くことにする．（このような 2 状態系を，量子情報の単位として **qubit** と呼ぶ．）2 スピン系の状態は，$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ の 4 つの状態の線形結合として書ける．

さて，一般には，与えられた量子状態に非古典的な相関があるかどうか調べることはなかなか難しい．しかし，純粋状態に話を限れば，局所的な状態の積に書けない状態には必ず非古典的な相関があることが知られている[3)]．従って，積の形に書けるかどうかを調べれば，エンタングルメントがあるかないかが分かる．例えば，$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ のように積の形に書けるものはエンタングルメントがない．次の状態もそうだ．

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

一見複雑な式に見えるが，新しい基底 $|0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ を定義すると $|0'\rangle \otimes |0'\rangle$ の形に書けるので，これもエンタングルメントを持たない．しかし，例えば**Bell 状態**と呼ばれる次の状態

$$|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{1}$$

は，どうやっても分解できない．積の形の一般形 $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)$ を展開してみれば，(1) の形を与える係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が存在しないことはすぐに分かる．こういう状態がエンタングルした状態である．

では，一般の状態

$$a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \tag{2}$$

が与えられたとき，分解可能かどうかはどうやったら判定できるだろう？

2.1 シュミット分解

それでは，各スピンの基底を取り替えることで，状態 (2) の形をどこまで簡単にできるか，という問題を考えよう．これはつまり，各スピンに対しそれぞれ別々にユニタリー変換をすることになるが，このような変換を**局所ユニタリー変換**と言う．2 つのスピンに対するユニタリー変換行列を U_1, U_2 とし，状態 (2) の係数を行列の形で

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書くことにすると，変換後の基底に関する係数行列は，$U_1 A U_2^T$ となる．そして，U_1, U_2 をうまくとれば，$U_1 A U_2^T$ は必ず対角行列にできることが知られている．これは，線形代数でよく習う対角化を少し一般化した形で，**特異値分解**と呼ばれている．対角化後の各対角要素は**特異値**と呼ばれ，非負の実数にとれることが知られている．普通の対角化では，与えられた行列 A に対し，行列 V をうまく選んで VAV^{-1} の形で対角化するのだが，今の場合は A の両側にかかる行列が全く別物でもよい点が異なる．普通の対角化の形だと対角化不可能行列も存在するが，特異値分解はどんな行列に対しても可能である．

結局，新しく用意した基底を改めて $|0\rangle, |1\rangle$ と書くことにすると，状態 (2) は特異値 λ_0, λ_1 を使って

$$\lambda_0|00\rangle + \lambda_1|11\rangle \tag{4}$$

の形に書くことができることが分かった．状態をこの形に表現することを**シュミット分解**と呼ぶ．この形になってしまえば，分解可能かどうかは明らかだ．もし λ_0, λ_1 のどちらかが 0 ならすでに単一積の形に分解されているし，どちらも 0 でなければ分解不可能である．(Bell 状態 (1) が分解不可能だったのと同じ理屈だ．) 言い換えれば，積 $\lambda_0\lambda_1$ が 0 なら分解可能，0 でなければ分解不可能である．特異値分解では行列式の絶対値は変化しないので，**コンカレンス**と呼ばれる次の量

$$C = 2\lambda_0\lambda_1 = 2|a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}|$$

を定義すると，$C = 0$ かどうかで分解可能性を判断することができる．そして，C の値が大きければ大きいほどエンタングルメントも大きいと言えるだろう．λ_0, λ_1 には規格化条件 $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1$ が課されるので，C が最大になるのは $\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，つまり，Bell 状態 (1) の形のときであり，このとき $C = 1$ となる[*4]．2-qubit 系ではコンカレンスがエンタングルメントの大きさを特徴付ける本質的に唯一の量である．

2.2 混合状態について少しだけ

さて，ここで混合状態のエンタングルメントについても少しだけ述べておこう．混合状態を表す密度行列は，

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{5}$$

の形に書けるが，この式に現れる $|\psi_i\rangle$ がすべてエンタングルメントのない状態にとれるとき，ρ は **separable** であると言う．Separable な状態は，エンタングルメントのない状態が確率的に混ざっただけと見なせるので，当然エンタングルメント

*4) コンカレンスの定義式にわざわざ係数 2 がついているのは，最大値を 1 に調整するためである．

のない状態である．Separable でない状態を，普通エンタングルした状態と呼ぶ*5)．

密度行列の分解 (5) は一意的ではないので，一般の密度行列に対して separable であるかどうかを判定することは実は非常に難しい．しかし，2-qubit 系に対しては，いくつか明示的な判定条件があり，コンカレンス C の混合状態への拡張も知られている[5]．混合状態のエンタングルメントに関してはこの他にも重要で面白くしかし難しい問題がたくさんあるのだが，それらについては例えば解説記事[6]等を見てもらうことにして，以下では純粋状態に話を限ろう．

3. スピンの揺らぎでエンタングルメントを測る

上で述べたように，2-qubit 系の純粋状態では，係数行列の行列式を見るだけでエンタングルメントの大小が分かる．これは非常に明快だが，後の都合上別の観点からも見てみよう．

3.1 ブロッホベクトルによるスピン状態の表示

まず，スピンの状態を表現するのにとても便利な道具である**ブロッホベクトル**を導入する．スピン 1/2 の系に対するブロッホベクトルとは，次のように定義される 3 次元ベクトルである：

$$\vec{v} = (\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle). \qquad (6)$$

ここで，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はパウリ行列である．要するに，空間 3 方向に対するスピンの期待値を並べたもので，直感的にはスピンの向きを表現していると思えばよい．ただし，このベクトルは向きだけでなく，その大きさにも重要な意味がある．計算してみればすぐに分かるように，スピンが純粋状態であれば，$|\vec{v}|$ は最大値 1 をとるが，混合状態では $|\vec{v}|$ は 1 より小さい．これは，純粋状態ではスピンの向きはっきりしているが，混合状態では色々な向きのスピンが混ざって平均化され，向きがはっきりしなくなるということを表している．

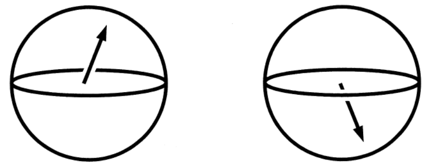


図 1　2-qubit 系のブロッホベクトル．ブロッホベクトルは単位球の中にある．エンタングルメントがなければ，ブロッホベクトルの長さは最大値 1 をとるが，エンタングルメントがあれば，スピンの揺らぎによって長さが 1 より小さいベクトルになる．

3.2 エンタングルした状態のブロッホ表示

それでは，エンタングルした 2-qubit 状態をブロッホ表示してみたらどうなるだろうか？ 2 つのスピン系があるのだから，それに応じてブロッホベクトルも 2 つ必要になる．これらを $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ としよう（図 1）．もし，2 つのスピンがエンタングルしていなければ，それぞれのスピンの向きは相手に無関係にはっきり決まっているのだから，$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ となるはずである．しかし，もしスピンがエンタングルしていれば，各スピンはもう一方のスピンの影響を受けるので，1 個のスピンだけを見た場合，はっきりとした向きがなく，揺らいでいる．そうすると，$|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2|$ は 1 より小さくなる．例えば，エンタングルメントのない状態 $|00\rangle$ の場合だと，どちらのスピンも z 方向上向きなのだから，$\vec{v}_1 = (0,0,1), \vec{v}_2 = (0,0,1)$ となり，$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ が成り立っている．しかし，エンタングルした状態 (1) に対してブロッホベクトルを計算してみると，$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$ となる．

従って，ブロッホベクトルの大きさを使ってエンタングルメントの大きさを測ることもできる．$|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2|$ は局所ユニタリー変換に対して不変だから，シュミット分解 (4) を使って計算すると，

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \sqrt{(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)^2} = \sqrt{1 - C^2}$$

となることが分かる．

$|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2|$ が 1 より小さくなるということは，各スピンが混合状態になっているということでもあるので，その混合の度合いでエンタングルメント

*5)　ただし，純粋状態の場合と違って，混合状態の場合には separable でないからと言って非古典的な相関があるとは限らない[4]．このように，混合状態のエンタングルメントは定義からしてかなり微妙な問題を含んでいる．

を測ることもできる．例えば，1 個目のスピンの部分密度行列 ρ_1 をとって，その von Neumann エントロピー $-\mathrm{Tr}(\rho_1 \ln \rho_1)$ を考えればよい．これも非常によく使われる measure で，2-qubit の場合にはやはりコンカレンスを使って明示的に表すことができる．（試してみよう．）

その他，スピンの揺らぎをもっと直接的に表す量として，スピン系の伏見関数を定義し，その拡がりによってエンタングルメントを測ることもできる．これも量子情報と量子カオスの関連を示唆する面白い話なのだが，残念ながら紙幅が足りないので省略しよう．興味のある人は論文[2]から文献をたどってみてほしい．

4. 3 体エンタングルメント

2-qubit のエンタングルメントは，結局 1 つの量 C だけで特徴付けられることが分かったが，3-qubit になると全く違う様相が現れてくる．次の 2 つの 3-qubit 状態を考えよう．

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \tag{7}$$

$$|\mathrm{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle). \tag{8}$$

この 2 つの状態はどちらもエンタングルしているが，GHZ（Greenberger–Horne–Zeilinger）状態と呼ばれる (7) の状態は，3 つの qubit のうち 2 つだけを見てもエンタングルメントがないという特徴を持っている．実際，1 つの qubit を無視して残りの 2 つの qubit の部分密度行列を作ると，

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right)$$

となり，明らかに separable である．この状況は，ボロミアン環と呼ばれる 3 つの輪の繋がり方に例えられる（図 2 左）．

一方，W 状態 (8) のほうは，1 つの qubit を無視すると，残りの 2 体の部分密度行列は separable ではない．（混合状態に対するコンカレンス[5]を計算してみれば分かる．）この状況は，図 2 右の 3 つの環に対応している．

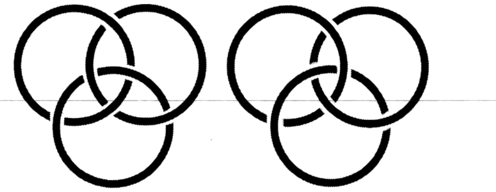


図 2　左がボロミアン環．一つの環を切ると，残りの 2 つもバラバラになる．右は W 状態に対応する 3 つの環．一つの環を切っても，残りの 2 つはまだ繋がっている．（考えてみて下さい．）

つまり，W 状態というのは，qubit の各ペアが 2 体的に絡まりあっているので，結果的に 3 つの qubit が絡まりあっているような状態であるのに対し，GHZ 状態というのは，3 体全部を見て初めて分かるような，真に 3 体的な絡まり合い方をしており，2 体ずつ見ても絡まっていることが分からないような状態なのである．このように，多体エンタングルメントには質的に異なる色々なタイプのものがあり，一概にどの状態のエンタングルメントが強いとは言えない．エンタングルメントの強さを測るなら，様々なタイプのエンタングルメントに応じて様々な量を用意するしかない．

GHZ 状態が持つ 3 体エンタングルメントを特徴付ける量として，次の 3-tangle が知られている[7]．

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= |d_1 - 2d_2 + 4d_3|, \\
d_1 &= a_{000}^2 a_{111}^2 + a_{001}^2 a_{110}^2 + a_{010}^2 a_{101}^2 + a_{100}^2 a_{011}^2, \\
d_2 &= a_{000}a_{111}a_{011}a_{100} + a_{000}a_{111}a_{101}a_{010} \\
&\quad + a_{000}a_{111}a_{110}a_{001} + a_{011}a_{100}a_{101}a_{010} \\
&\quad + a_{011}a_{100}a_{110}a_{001} + a_{101}a_{010}a_{110}a_{001}, \\
d_3 &= a_{000}a_{110}a_{101}a_{011} + a_{111}a_{001}a_{010}a_{100}.
\end{aligned}$$

ここで，a_{ijk} は，状態を $|\psi\rangle = \sum_{i,j,k} a_{ijk}|ijk\rangle$ と展開したときの係数である．この量を $|\mathrm{W}\rangle$ と $|\mathrm{GHZ}\rangle$ に対して計算すると，値はそれぞれ 0, 1 となり，確かに 3 体的なエンタングルメントを測る量であることが分かる．

さて，我々の問題は，コンカレンスや 3-tangle のようなエンタングルメントを特徴付ける量を，もっと一般の多体系に対してどのように定義する

か，ということである．一つの考え方として，コンカレンス (5) が係数行列 (3) の行列式になっていることに注目し，その一般化である超行列式というものを考える，という方向がある．これも非常に面白い考え方なのだが，それについては解説記事[8) を見てもらうことにして，ここでは別の方向で考えてみよう．

5. 群の表現論で measure を作る

まず，簡単な 2-qubit 系の場合から始める．この系に対する局所ユニタリー変換を考えよう．変換の群は今の場合 $SU(2) \times SU(2)$ だ[*6)]．スピン j を持つ $SU(2)$ の表現を $[j]$ と書くと，2-qubit 系の状態はスピン 1/2 の表現が 2 つくっついているのだから，表現 $[1/2] \otimes [1/2]$ に属していることになる．

次に，与えられた 2-qubit 系の状態を $|\psi\rangle$ とするとき，仮想的にその状態のコピーを 2 つ持ってきて，$|\psi\rangle$ が 2 つある状態 $|\psi\rangle^{\otimes 2} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ を考えよう (図 3)．2-qubit 系が 2 つあるので，結局 4 つの qubit があることになる．局所的なユニタリー変換群は，図 3 の左側 2 個と右側 2 個のスピンにそれぞれ作用するので，それらを既約分解しよう．難しい言い方に聞こえるかもしれないが，要は，左側と右側でそれぞれスピンの合成をやるのだ．よく知られているように，スピン 1/2 の系を 2 つ合成すると，スピン 1 の部分 (triplet) とスピン 0 の部分 (singlet) に分かれる．記号で書けば，$[1/2] \otimes [1/2] = [1] \oplus [0]$ である．この分解を図 3 の左右両方でやれば，全系は $[1] \otimes [1], [1] \otimes [0], [0] \otimes [1], [0] \otimes [0]$ の 4 つの部分 (既約表現) に分解できることになる．

さて，$|\psi\rangle^{\otimes 2}$ を 4 つの既約表現に分解しよう．スピン j 表現の空間への射影演算子を $P_{[j]}$ と書いて，$P_{[j]} \otimes P_{[k]}|\psi\rangle^{\otimes 2}$ を考える．ここで，2 つのコピーの入れ替え (図 3 で言うと，上の行と下の行の入れ替え) を考えると，明らかに $|\psi\rangle^{\otimes 2}$ はこの入れ替えに対して対称である．各既約表

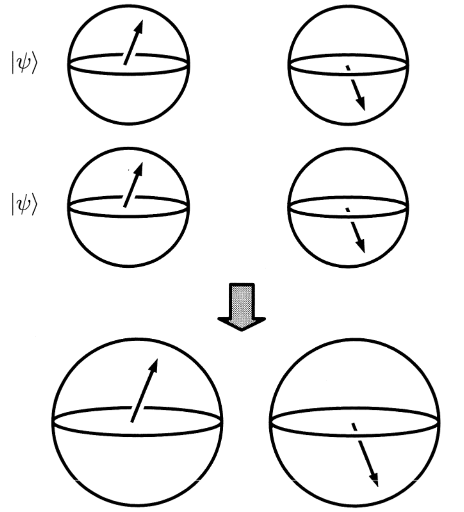


図 3 2-qubit 状態 $|\psi\rangle$ を 2 つ用意して，左の 2 つの qubit と右の 2 つの qubit でそれぞれスピンの合成を行う．

現に対して考えると，[1] は対称，[0] は反対称であるから，全体として $[1] \otimes [1]$ と $[0] \otimes [0]$ は対称，$[0] \otimes [1]$ と $[1] \otimes [0]$ は反対称となり，$P_{[0]} \otimes P_{[1]}|\psi\rangle^{\otimes 2} = P_{[1]} \otimes P_{[0]}|\psi\rangle^{\otimes 2} = 0$ が成り立つ．よって，$[0] \otimes [1]$ と $[1] \otimes [0]$ は考えなくてよいことが分かる．従って，

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = P_{[1]} \otimes P_{[1]}|\psi\rangle^{\otimes 2} + P_{[0]} \otimes P_{[0]}|\psi\rangle^{\otimes 2}$$

が成り立つ．

さらに，図 3 のブロッホベクトルを見てほしい．$|\psi\rangle$ にエンタングルメントがないときは，各ブロッホベクトルの大きさは最大であり，しかも，コピーどうしのスピンの向きは当然全く同じだから，スピンの合成をすると，必ずスピン最大の状態ができる．つまり，$|\psi\rangle^{\otimes 2}$ は表現 $[1] \otimes [1]$ の中に収まってしまう．これは，$[0] \otimes [0]$ への射影が 0 になるということでもある．しかし，$|\psi\rangle$ がエンタングルしていれば，ブロッホベクトルの大きさは元々最大ではないので，合成後も最大ではない．したがって，小さい方の表現 $[0] \otimes [0]$ に含まれる部分がある程度存在することになる．まとめると，以下のようになる：

*6) ユニタリー群 $U(2)$ で考えても特殊ユニタリー群 $SU(2)$ で考えても，本質的な違いはない．

$$\begin{aligned} &\text{エンタングルメントがない} \\ \Longleftrightarrow\quad &\left|P_{[0]}\otimes P_{[0]}|\psi\rangle^{\otimes 2}\right| = 0 \end{aligned}$$

さて，この $\left|P_{[0]}\otimes P_{[0]}|\psi\rangle^{\otimes 2}\right|$ を具体的に計算してみよう．まず，スピン 0 の項は，次のように書ける．

$$|s\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle - \left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\right). \tag{9}$$

図 3 に従って，2 つのスピンの状態を縦に並べて書いたことに注意．$[0]\otimes[0]$ の基底は，$|s\rangle$ を横に 2 つ並べたものだから，

$$\begin{aligned} |s\rangle\otimes|s\rangle = \frac{1}{2}\Bigg(&\left|\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}\right\rangle + \left|\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}\right\rangle \\ &-\left|\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\right\rangle - \left|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right\rangle\Bigg). \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} \left|P_{[0]}\otimes P_{[0]}|\psi\rangle^{\otimes 2}\right| &= \left|\left(\langle s|\otimes\langle s|\right)|\psi\rangle^{\otimes 2}\right| \\ &= |a_{00}a_{11}-a_{01}a_{10}|. \end{aligned}$$

さて，ここまでだと，単に 2-qubit 系のエンタングルメントがコンカレンスで測れることを再確認しただけだが，この話は容易に一般化できる．2-qubit ではなくてもっとたくさんの qubit を考えてもよいし，qubit の代わりに一般の n 状態系を考えてもよい．（その場合は変換群が $SU(2)$ から $SU(n)$ に変わる．）また，用意するコピーの数も何個でもかまわない．いずれにしても，与えられた量子状態 $|\psi\rangle$ に対し，任意の q 個のコピー $|\psi\rangle^{\otimes q}$ を考え，局所ユニタリー群の既約表現に分解すると，エンタングルメントがない場合は，「最も大きい表現」（qubit 系の場合はスピン最大の表現）*7) に $|\psi\rangle^{\otimes q}$ が含まれてしまうのだ．そして，その他の表現への射影はすべて 0 になる．

エンタングルした状態の場合には「その他の表現」にも成分が現れ，各表現への射影のノルムが entanglement measure としての働きをする．ここで大事なのは，上で述べた 2-qubit の例と違って，一般には「その他の表現」はたくさん存在することである．そして，様々な既約表現への $|\psi\rangle^{\otimes q}$ の「散らばり具合」にエンタングルメントの個性が現れ，これによって状態を分類できる．例えば，ある既約表現への射影が 0 である状態とそうでない状態は，局所的な操作と古典的な通信（**LOCC**, Local Operations and Classical Communication）によって決して（確率的にも）移り合えないことが示せる．

様々の表現の中でも特に面白いのは，「最も小さい表現」である singlet（1 次元表現）である．上で見たように，2-qubit 系のコンカレンスは $|\psi\rangle^{\otimes 2}$ の singlet への射影として得られるし，3-qubit 系の 3-tangle は，実は $|\psi\rangle^{\otimes 4}$ の singlet への射影として得られる．また，singlet への射影のノルムは，LOCC の下で増加しない **entanglement monotone** と呼ばれる性質の良い量になることが示せる．

*7) 一般の $SU(n)$ の場合には，「最も大きい表現」とは，「最も大きい highest weight vector を持つ表現」のことになる．最も次元の高い表現とは限らないことに注意．

6. おわりに

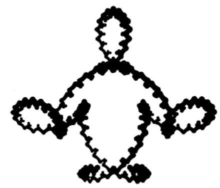
ここで示した entanglement measure の構成法は，a) 任意の系に適用可能，b) 1 つの系に対して系統的に多数の measure を生成できる，という条件を満たす現在唯一の方法であり，これまで個別的に作られてきた多くの measure をこのやり方で再構成できる．「多体エンタングルメントの構造の理解」という目標には我々はまだはるかに遠いが，ここで述べた群論的な視点が新たな発展をもたらすことを期待したい．

参考文献

1) 清水明著:『新版　量子論の基礎』, サイエンス社 (2003).
2) A. Sugita, *Phys. Rev. A* **77**, 052304 (2008).
3) A. Peres 著（大場一郎，山中由也，中里弘道共訳）：『ペレス 量子論の概念と手法』，丸善 (2001).
4) R.F. Werner, *Phys. Rev. A* **40** (1989) 4227.
5) W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245.
6) 石坂智，数理科学 **500** 2 月号 (2002).
7) V. Coffman, J. Kundu and W.K. Wootters, *Phys. Rev. A* **61**, 052306 (2000).
8) 三宅章雅，和達三樹，数理科学 **500** 2 月号 (2002).

（すぎた・あゆむ，大阪市立大学工学部）

観測による量子系制御



湯浅 一哉

1. はじめに

量子力学の世界では，日常の感覚からすると奇妙とも思えるような様々な現象が起こっている．本号の特集でその面白さを楽しんでおられるところと思うが，本稿ではその中でも量子力学の世界における「観測」にまつわる話題を紹介しよう．

私たちの身の回りの世界では，例えば野球のピッチャーの投げたボールのスピードを測定したとたんに，そのボールがどこにあるのか分からなくなってしまうなんてことは到底ありそうにない．しかしミクロの世界では，大げさに言うとそんなことが起こってしまうのだ．ある量（例えば電子の運動量）を正確に測定すると，別の量（例えば電子の位置）が全く不確定になってしまう．それは観測の方法がお粗末だからなのではなく，量子力学の「不確定性原理」の帰結として，どんなにがんばっても避けられない事実なのだ．

このように量子力学の世界では，一般に観測行為がその観測対象の状態を乱してしまう．一見すると悲観的な印象を与えかねないこの事実も，うまく利用できるとしたら面白いと思われないだろうか？ 観測行為がもたらす状態変化は，見方によっては「観測行為による状態操作」と言うことができる．**観測行為の影響をうまく活用することで量子系を制御しよう**というのが基本的なアイデアだ．その考えは実際に広く利用されているが，ここでは特に「**繰り返し観測**」に焦点を当て，それが引き起こす興味深い現象を2例ばかり取り上げようと思う．一つは「**量子ゼノン効果**」であり，もう一つは「**量子状態純化**」の新機構である．

最近は，量子情報技術に関する研究の大きな盛り上がりもあって，量子系を制御する技術の開発，アイデアの創出がますます重要なテーマとなっている．また，量子情報の様々なアイデアでは，エンタングルメントに代表されるように，実験室でも普通には見つからないような極度に量子性の高い状態が用意されていることが前提となっている．だからこそ，常識を超えるような驚くべきことが可能になるわけだが，では，そんな状態はどうやって準備するのか？ そしてその量子性をどうやって維持するのか？ そういうところから解答を与えていかなければ，量子情報のアイデアを実現することはできない．ここで紹介するのは，こうした課題の解決にも寄与する可能性を秘めた話題である．

2. 射影観測

量子力学の世界の「観測」は，どのような式で書かれるだろうか？ 一般に量子系は，様々な状態の重ね合わせ状態にある．例えば，系のエネルギーが E_n（$n=0,1,2,\ldots$）である状態 $|E_n\rangle$ の重ね合わせ

$$|\psi\rangle = c_0|E_0\rangle + c_1|E_1\rangle + \cdots . \qquad (1)$$

この状態 $|\psi\rangle$ にある量子系のエネルギー値を測定

すると，$\{E_n\}$ のうちのどの値が測定結果として得られるかは確率的で，$|c_n|^2$ の確率で E_n という結果が得られることになる．このとき，ひとたびある特定のエネルギー値 $E_{\bar{n}}$ が得られると，もはや系はそのエネルギーを持っていることがはっきりしているから，系の状態は $|E_{\bar{n}}\rangle$ 以外にあり得ない．すなわち，エネルギー測定の後の状態は，$|\psi\rangle \to |E_{\bar{n}}\rangle$ に変化しているのである．

この状態変化は，**射影演算子**

$$\mathcal{O}_{\bar{n}} = |E_{\bar{n}}\rangle\langle E_{\bar{n}}| \tag{2}$$

を用いて

$$|\psi\rangle \to \frac{\mathcal{O}_{\bar{n}}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\mathcal{O}_{\bar{n}}|\psi\rangle}} \tag{3}$$

と書くことができる．規格化のために添えられた分母に見られる $\langle\psi|\mathcal{O}_{\bar{n}}|\psi\rangle$ は，エネルギー値 $E_{\bar{n}}$ が測定結果として得られ，この射影が起こることの確率 $|c_{\bar{n}}|^2$ に等しい．

この状態変化こそが，観測行為が観測対象に及ぼす影響に他ならないが，このジャンプ，射影はなぜ，そして，いかなる物理的過程を経て起こるのか？ それは重要な疑問の一つで，本誌上でもたびたび論ぜられてきたことだが[1]，ここではそこに深入りすることなく，このジャンプを素直に受け入れることにして，それが私たちに何をもたらしてくれるかに集中することにしよう．

3. 量子ゼノン効果

まずは「量子ゼノン効果」から始めよう．ミスラとスーダルシャンの最初の論文[2]以来，多くの研究者を惹き付け，多くの研究がなされてきた[1,3]．

量子系の時間発展は，ハミルトニアン H によるユニタリー発展で記述される．すなわち，系の初期状態を $|\psi_0\rangle$ とすると，時刻 t には $e^{-iHt}|\psi_0\rangle$ となっている*1)．このとき，系は一般に $|\psi_0\rangle$ やその他の状態の重ね合わせ状態になっている．系が依然として初期状態 $|\psi_0\rangle$ に居残っていることの確率を考えよう．それは

$$P(t) = |\langle\psi_0|e^{-iHt}|\psi_0\rangle|^2 \tag{4}$$

で与えられ，「生存確率」と呼ばれる．時間が経過すると初期状態 $|\psi_0\rangle$ から離れていくが，スタートして間もない t が小さな時間領域では，それは

$$P(t) \simeq 1 - (\Delta H)^2_{\psi_0} t^2 + \cdots \tag{5}$$

のように2次関数的に減衰する．ただし，$(\Delta H)^2_{\psi_0} = \langle\psi_0|H^2|\psi_0\rangle - \langle\psi_0|H|\psi_0\rangle^2$ は初期状態 $|\psi_0\rangle$ におけるエネルギーの分散（ばらつき）である．このテーラー展開で t の1次の項がないところが注目点で，それは量子系の時間発展のユニタリー性を反映しており，時間反転対称性の顕れでもある．

さて，この時間発展の最中に，系が初期状態 $|\psi_0\rangle$ に留まっているかどうかの確認を，一定の時間間隔 τ で規則正しく繰り返すことを考えよう．毎回の確認で初期状態 $|\psi_0\rangle$ が見出されるたび，(3) のように射影が起こって $|\psi_0\rangle$ に引き戻され，その都度，最初と同じ $|\psi_0\rangle$ からの時間発展が再開することになる．その結果，N 回の観測いずれにおいても初期状態 $|\psi_0\rangle$ に留まっていることが確認されることの確率は，$P^N(\tau)$ で与えられることが分かる．

$$P^{(\tau)}(t) = P^N(\tau) \quad \text{at} \quad t = N\tau \tag{6}$$

と書こう．

短い時間間隔 τ で頻繁に確認する場合（時刻 $t = N\tau$ を固定して $N \to \infty$），この生存確率は

$$P^{(\tau)}(t) \simeq \Big[1 - (\Delta H)^2_{\psi_0}\tau^2 + \cdots\Big]^N \simeq e^{-N(\Delta H)^2_{\psi_0}\tau^2} \to 1 \tag{7}$$

となり，初期状態 $|\psi_0\rangle$ に凍り付いて動かなくなる．これが量子ゼノン効果である．

グラフを見ると一目瞭然だ（図1）．観測によって初期状態 $|\psi_0\rangle$ にリセットされるたびに (5) の2次関数的振舞いが再び始まることがポイントで，図より明らかなように，観測の時間間隔 τ が短いほど生存確率の減衰が抑制され，究極的には全く

*1) 本稿では $\hbar = 1$ とする．

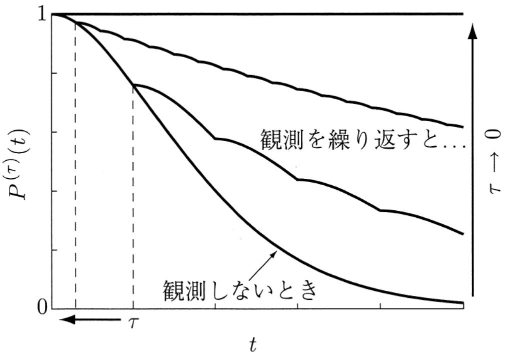


図 1　量子ゼノン効果．観測の時間間隔 τ を小さく取ると，生存確率の減衰が抑えられる．

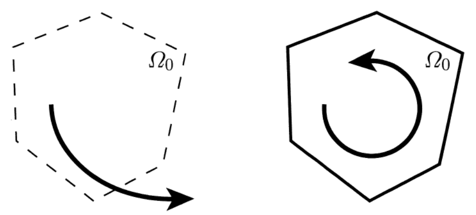


図 2　量子ゼノン部分空間と量子ゼノン・ダイナミクス．部分空間 Ω_0 内に留まっていることを頻繁に確認すると，Ω_0 の境界がくっきりしてきて（左 → 右），外に出られなくなる．系は Ω_0 内をユニタリー発展する（右）．

減衰しなくなる．見ていないと動いていくものも，頻繁に見ると動かなくなってしまうというのだ．

これは観測による量子系制御の一例だ．ただ，何でも凍り付けてしまうというだけではあまり面白くない．そこで，観測の仕方を変えよう．すると，違ったことができるようになる．それに関する最近の知見を紹介しよう．

上の例では毎回 $|\psi_0\rangle$ を確認し，系をそれにリセットすることを繰り返したが，特定の状態を確認するのではなく，状態空間中で複数の状態を含む，ある部分空間 Ω_0 内に系がいるかどうかの確認を繰り返すことを考えよう．式で言えば，観測の射影演算子を $\mathcal{O}=|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ から複数の状態を含む $\mathcal{O}=\sum_{\psi_n\in\Omega_0}|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ に置き換えるのである．すると，部分空間 Ω_0 内の状態からスタートした量子系は，この観測が頻繁に繰り返される極限（$\tau\to 0$）の下，Ω_0 から外へ出られなくなる．これは量子ゼノン効果だ．つまり，系が Ω_0 内に留まっているという生存確率が 1 になる．一方で，Ω_0 の中ではユニタリー的に動くことが可能だ．この時間発展を「**量子ゼノン・ダイナミクス**」と言い，系が閉じ込められる部分空間 Ω_0 は「**量子ゼノン部分空間**」と呼ばれる（図 2）[4]．

4. 量子ゼノン効果によるデコヒーレンス制御

量子情報技術の実現に向けて，「デコヒーレンス」の問題の解消が重要な課題となっている[5]．現実の実験室で (1) のようにきれいな量子力学的重ね合わせの状態を長時間維持することは難しく，実験環境の様々な要因によって「量子力学的干渉」の効果は容易にかき消され，量子性が失われてしまう．

量子力学的干渉が消えてしまった状態は，もはや (1) のように状態ベクトルで書くことはできないが，密度演算子を用いるとよい．密度演算子 ρ とは，一般に物理量 A の期待値を

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\{\rho A\} \tag{8}$$

で与える演算子である．(1) のような量子力学的にきれいな状態の密度演算子は

$$\rho=|\psi\rangle\langle\psi| \tag{9}$$

であるが，これに対して量子力学的干渉効果の失われてしまった状態は，例えば

$$\rho=\sum_n p_n|E_n\rangle\langle E_n| \tag{10}$$

のようなものである．前者には $|E_m\rangle\langle E_n|$（$m\neq n$）のような“非対角項”があるが，後者にはない．この非対角項が干渉効果を担っていて，後者ではそれが失われている．(9) のように書ける状態を「**純粋状態**」と言い，(10) のようにいくつかの純粋状態が重み付きで重ね合わされたようにしか書けない状態を「**混合状態**」と言う．温度 T の熱平衡状態は (10) で $p_n\propto e^{-E_n/k_\mathrm{B}T}$ としたもので，混合状態の典型である（k_B はボルツマン定数）．

外界の影響を受けて純粋状態から混合状態へと移行し，量子コヒーレンス（量子干渉性）が失われ

てしまう過程のことを**デコヒーレンス**と言う．これが起こってしまうと，量子情報のアイデアに必要なリソースが失われてしまう．

前節で説明した量子ゼノン部分空間のアイデアは，このデコヒーレンスを抑制する方法としての応用の可能性を秘めている．系の特徴とデコヒーレンスの要因に合わせて観測の仕方をうまくデザインし，量子ゼノン部分空間内での量子ゼノン・ダイナミクスが外界の影響を受けないものにできれば，デコヒーレンスをシャットアウトできるというわけである[6]．しかも，系はその部分空間内を動くことができるので，そこで量子コンピューティングを実行できる．系を特定の状態に凍り付けてしまっては，そうはいかない．量子ゼノン部分空間は，量子ゼノン効果の量子情報技術への応用として大変興味深いアイデアである．

5. 繰り返し観測による量子状態純化

ここまでは，量子ゼノン効果を見てきた．これ以外にも，繰り返し観測がもたらす面白い効果が見つかった．それを紹介しよう[7,8]．

図 3 のような設定を考える．2 つの量子系 X と A が相互作用する系である．初期状態は

$$\rho_0 = |\phi\rangle_{\mathrm{X}}\langle\phi| \otimes \rho_{\mathrm{A}} \tag{11}$$

で，A は一般に混合状態 ρ_{A} にあるものとしよう*2)．合成系 X–A がハミルトニアン H で時間発展する中，X が状態 $|\phi\rangle_{\mathrm{X}}$ にあることの確認を，時間間隔 τ で繰り返す．この観測の射影演算子は

$$\mathcal{O} = |\phi\rangle_{\mathrm{X}}\langle\phi| \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \tag{12}$$

で，合成系 X–A の密度演算子 ρ は

$$\rho \to \frac{\mathcal{O}\rho\mathcal{O}}{\mathrm{Tr}\{\mathcal{O}\rho\mathcal{O}\}} \tag{13}$$

と射影される．

さて，X が状態 $|\phi\rangle_{\mathrm{X}}$ にあることが立て続けに N 回確認されたとき，合成系 X–A の状態は

*2) 与えられた状態が (11) のようになっていなかったとしたら，(12) の射影的観測 $\mathcal{O}$ を一度施せばよい．

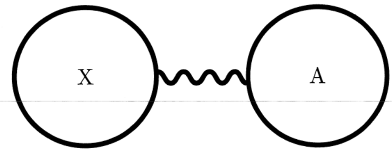


図 3 繰り返し観測による量子状態純化の設定．

$$\begin{aligned}&\rho^{(\tau)}(N)\\&= (\mathcal{O}e^{-iH\tau}\mathcal{O})^N\rho_0(\mathcal{O}e^{iH\tau}\mathcal{O})^N/P^{(\tau)}(N)\\&= |\phi\rangle_{\mathrm{X}}\langle\phi| \otimes \rho_{\mathrm{A}}^{(\tau)}(N),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\rho_{\mathrm{A}}^{(\tau)}(N) = [V_\phi(\tau)]^N\rho_{\mathrm{A}}[V_\phi^\dagger(\tau)]^N/P^{(\tau)}(N) \tag{15}$$

となっている．ただし，

$$V_\phi(\tau) = {}_{\mathrm{X}}\langle\phi|e^{-iH\tau}|\phi\rangle_{\mathrm{X}} \tag{16}$$

は射影された時間発展演算子で，A のヒルベルト空間に作用する演算子である．この状態が得られるのは X に対する N 回の観測すべてで状態 $|\phi\rangle_{\mathrm{X}}$ が見出されたときだけであるが，規格化定数 $P^{(\tau)}(N)$ はその確率に他ならない．

A には直接タッチしないのだが，**A は X に対する観測行為の影響を相互作用を通じて間接的に受ける**ことになる．X に観測を繰り返していくと，A の状態 $\rho_{\mathrm{A}}^{(\tau)}(N)$ はどうなるだろうか？*3) その鍵は演算子 $V_\phi(\tau)$ が握っている．これはエルミート演算子ではないので，その固有値 λ_n は一般に複素数となり，右固有ベクトル $|u_n\rangle_{\mathrm{A}}$ と左固有ベクトル ${}_{\mathrm{A}}\langle v_n|$ が互いにエルミート共役の関係にあるとも限らない．さらには，固有値 λ_n が縮退すると対角化できる保証もない．しかしながら，対角化可能であるものとして先に進んでみよう：

$$V_\phi(\tau) = \sum_n \lambda_n|u_n\rangle_{\mathrm{A}}\langle v_n|. \tag{17}$$

ただし，

$${}_{\mathrm{A}}\langle v_m|u_n\rangle_{\mathrm{A}} = \delta_{mn} \tag{18}$$

と規格化した．すると，i) 絶対値が最大の固有値が唯一 λ_0 だけで，それが ii) 離散固有値で iii) 縮

*3) 量子ゼノン効果の場合とは異なって，τ は有限に保つ．

退していないとき，N が大きくなるにつれて

$$[V_\phi(\tau)]^N = \sum_n \lambda_n^N |u_n\rangle_A\langle v_n| \to \lambda_0^N |u_0\rangle_A\langle v_0| \tag{19}$$

となる．その結果，A の状態は

$$\rho_A^{(\tau)}(N) \to |u_0\rangle_A\langle u_0| \tag{20}$$

に行きつく．すなわち，**混合状態 $\boldsymbol{\rho_A}$ にあった A が，純粋状態 $|\boldsymbol{u_0}\rangle_{\mathbf{A}}$ に導かれるのだ！** 繰り返し観測がもたらすもう一つの効果がこれである．このメカニズムには，上で仮定した対角化可能性が本質的ではないことが分かるだろう[8)]．

最終的に得られる純粋状態 $|u_0\rangle_A$ は $V_\phi(\tau)$ の最大固有値に属する固有状態であり，初期状態 ρ_A には依存しない．τ や $|\phi\rangle_X$ や H をうまく調節することで量子状態を，それも任意の混合状態から純粋状態を準備する手法として使えそうだ．実験室で普通に見つかるのは，熱平衡状態のように量子性の低い混合状態ばかりだから，そこから量子コヒーレンスのある純粋状態を準備する手法として役に立つに違いない．

ただし，この状態純化が実現するのは確率的だから，その確率 $P^{(\tau)}(N)$ に気を付けなければならない．それは，漸近的に

$$P^{(\tau)}(N) \to |\lambda_0|^{2N} {}_A\langle u_0|u_0\rangle_A\langle v_0|\rho_A|v_0\rangle_A \tag{21}$$

と振る舞う．$e^{-iH\tau}$ のユニタリー性から $0 \le |\lambda_n| \le 1$ の制限が付くが，$|\lambda_0| < 1$ の場合，確率は観測回数 N とともに指数関数的に減衰してしまう．一方，パラメータをうまく調節することで

$$|\lambda_0| = 1 \tag{22}$$

とすることができれば，確率の減衰を抑えられる．また，状態純化のスピードを速めようと思ったら，

$$|\lambda_n/\lambda_0| \ll 1 \quad (n \neq 0) \tag{23}$$

となるようにすればよい．これら 2 つの条件 (22)–(23) が効率の良い状態純化のための条件となる．

6. いくつかの簡単な例

ここで，この繰り返し観測による量子状態純化のスキームの特長を整理しておこう．まずは，

① 間接制御

である点．A に量子状態を準備したいのに対し，それに直接触るのではなく，X のほうに観測を繰り返す．この特徴は，エンタングルメントの準備に適しているかもしれない．エンタングルメントは，その一部に触れてしまうと瞬く間に全体が壊れてしまうということが起こるから，対象に直接触らないことが有用なこともあろう．また，量子コンピュータで多数の量子ビットを準備しなければならない場合，一つ一つにアクセスしていては大変なこともあろうから，量子ビット列の一部（X）に操作を加えて残り（A）を制御することができると便利かもしれない．続いて，

② シンプル

なところ．異なる操作を順序正しく施していくというような面倒さがなく，単純に同じ観測を繰り返せばよいというシンプルさがウリである．また，

③ 最適性

を達成するための指針 (22)–(23) がはっきりしており，これを頼りに調節することで，望みの状態をゼロでない確率で取り出せる．さらには，

④ 拡張性

があげられる．前節で見たメカニズムは，個々のモデルの特徴を巧みに使うようなものではなく，一般性を備えているので，上に掲げた条件 i)–iii) さえ満足できれば，様々な系，設定で活用できよう．

実際に，いくつかの簡単な例を見てみよう．まずは，図 4 (a) のように量子ビット X, A, B, ... が連なっている系．ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H = g(\sigma_+^{(X)}\sigma_-^{(A)} + \sigma_-^{(X)}\sigma_+^{(A)}) \\ + g(\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(B)} + \sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(B)}) + \cdots \end{aligned} \tag{24}$$

としよう．$\sigma_+^{(J)}$ $(J = X, A, B, \ldots)$ は，量子ビット J を $|0\rangle_J \to |1\rangle_J$ と反転する演算子，$\sigma_-^{(J)}$ はその逆の反転 $|1\rangle_J \to |0\rangle_J$ を引き起こす演算子である．この場合，端の量子ビット X が $|0\rangle_X$ にある

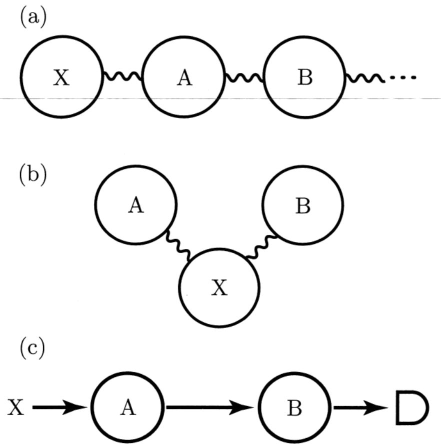


図 4　簡単な応用の設定.

ことを繰り返し確認すると，残りの量子ビットが

$$\rho_{\mathrm{AB}\ldots} \to |00\ldots\rangle_{\mathrm{AB}\ldots}\langle 00\ldots| \qquad (25)$$

に準備される[8]．多量子ビットの初期化だ．

あるいは，3 つの量子ビットが図 4 (b) のように配置され，(24) と同様のハミルトニアンで相互作用する場合，量子ビット X が $|+\rangle_{\mathrm{X}} = (|0\rangle_{\mathrm{X}}+|1\rangle_{\mathrm{X}})/\sqrt{2}$ の状態にあることを繰り返し確認すると*4)，A と B にエンタングルメント $|\Psi^-\rangle_{\mathrm{AB}} = (|01\rangle_{\mathrm{AB}} - |10\rangle_{\mathrm{AB}})/\sqrt{2}$ が準備される[8]:

$$\rho_{\mathrm{AB}} \to |\Psi^-\rangle_{\mathrm{AB}}\langle\Psi^-|. \qquad (26)$$

いずれの場合にも，系のパラメータを適当にチューニングすることで，効率の良い状態純化の条件 (22)–(23) を満足することができる[8]．

さらには，図 4 (c) のように離れた系 A–B にエンタングルメントを準備することも可能である[9]．両者は直接相互作用しないが，それらを媒介する系 X を準備して A, B と順次相互作用させ，出てきたところで X の状態を確認する．このプロセスを繰り返すことで，系 A–B にエンタングルメントが抽出されるのである．

*4)　量子ビットとして電子などのスピンを用いる場合，z 軸方向上向きのスピンを $|1\rangle$，下向きのスピンを $|0\rangle$ に対応させるなら，$|+\rangle$ はスピンが x 軸方向を向いている状態である．

7. おわりに

量子系を制御するのに観測の効果を利用しようというアイデアは，何もここで取り上げた繰り返し観測による 2 つの例に限ったものではなく，量子コンピューティングを含め，様々な局面で積極的に利用されている．「見る」ことは，量子系制御の重要な手段の一つなのだ．

「観測」は，その原理的側面も含め，私たちを惹き付けてやまない．その面白さの一側面を本稿を通じて垣間見て頂けたら幸いである．

前半の量子ゼノン効果に関しては，パオロ・ファッキ，中里弘道，サベリオ・パスカッチオ，田崎秀一の各氏らの研究から多くを学びました．後半の量子状態純化の話題は，中里弘道氏やアントニーノ・メッシーナ氏のグループの方々との共同研究の成果に基づいています．各氏との日ごろの共同研究に感謝します．

参考文献

1)　別冊・数理科学「量子力学の発展」(2001 年)；別冊・数理科学「量子の新世紀」(2006 年)．
2)　B. Misra and E.C.G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **18**, 756 (1977).
3)　H. Nakazato, M. Namiki, and S. Pascazio, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 247 (1996); D. Home and M.A.B. Whitaker, *Ann. Phys.* **258**, 237 (1997); P. Facchi and S. Pascazio, in *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (Elsevier, Amsterdam, 2001), Vol. 42, Chap. 3, p. 147; K. Koshino and A. Shimizu, *Phys. Rep.* **412**, 191 (2005).
4)　P. Facchi and S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 080401 (2002).
5)　内山智香子，「量子情報とデコヒーレンス」，数理科学 2001 年 6 月号．
6)　P. Facchi, S. Tasaki, S. Pascazio, H. Nakazato, A. Tokuse, and D.A. Lidar, *Phys. Rev. A* **71**, 022302 (2005).
7)　H. Nakazato, T. Takazawa, and K. Yuasa, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060401 (2003).
8)　H. Nakazato, M. Unoki, and K. Yuasa, *Phys. Rev. A* **70**, 012303 (2004).
9)　G. Compagno, A. Messina, H. Nakazato, A. Napoli, M. Unoki, and K. Yuasa, *Phys. Rev. A* **70**, 052316 (2004); K. Yuasa and H. Nakazato, *Prog. Theor. Phys.* **114**, 523 (2005).

（ゆあさ・かずや，早稲田大学高等研究所）

観測でエラーを訂正する

量子ゼノン効果を量子情報技術に応用することを最初に思いついたのは，量子コンピュータ理論を打ち立てた英のDeutschである．彼は量子計算の際に起きるエラーを観測によって制御するという，一見矛盾するかのようなアイデアを示した．

きっかけは，米IBMのLandauerとの出会いだった．1985年にDeutschは量子コンピュータ理論を発表したが，当初はほとんど関心を持たれなかった．だがLandauerはいち早く彼をIBMに招き，ポスドクだった青年を「まるでVIPのように」(Deutsch)歓待した．これが論争の始まりだった．

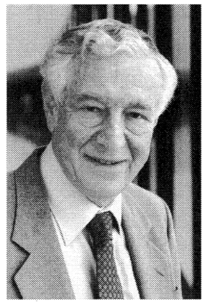
「計算は物理過程だ」と唱え，計算の熱力学解析に取り組んだLandauerは，すぐに量子コンピュータの弱点に気付いた．エラー訂正が困難なのだ．

どんな計算機でも一定の確率でエラーが起きる．古典コンピュータなら1ビットに複数のビットを割り当て，多数決などによって正解を得ることができる．だが量子コンピュータはビットの値を見るとコヒーレンスが壊れ，計算が止まってしまう．「量子コンピュータは本質的にエラー訂正ができない．だから実現しない」とLandauerは主張した．

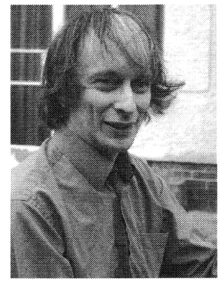
Deutschは反論した．例えば超伝導を担う電子は，外界にさらされているのに流れ続ける．外に情報を出していても中のコヒーレンスを保つような何らかの機構が，自然界には存在するのだ．あらゆる量子力学過程が量子計算によって記述できることは，Deutsch自身が証明している．「自然界に存在する以上，コヒーレンスを保つアルゴリズムは必ずある．いずれは見つかるはずだ」．

Landauerは納得しなかった．物理学法則が許すかどうかに最大の関心がある理論派のDeutschと，現実に即した答えを求める工学者肌のLandauer．タイプの異なる2人の議論は平行線をたどり，Landauerは学会などで量子コンピュータの実現可能性を繰り返し否定した．業を煮やしたDeutschは，自らエラー訂正の方法を考え始めた．

彼が考えたのは量子コンピュータを複数用意し，計算のたびに全体の状態が「対称」部分空間にあるかどうかを観測する方法だ．対称とは任意の二つのコンピュータの状態を入れ替えても全体の状態が変わらないことだ．対称部分空間にとどまっていることが確認され，その結果，状態が対称化されると，非対称化をもたらすエラーが切り落とされる．量子コンピュータの数を増やせば，これでは排除できないエラーの起きる確率はどんどん下がる．計算中に頻繁に観測すれば，量子ゼノン効果により，対称化の実現確率は1に近づく．量子ビットの値は観測しないので，計算に影響はない．



Rolf Landauer
(IBM提供)



David Deutsch
(根來智実撮影)

Deutschは基本的なアイデアを1993年に英で開かれた初の量子情報シンポジウムで話した．これにモントリオール大のJozsaが興味を持った．Deutschの友人でもあった彼は，帰途に車に同乗し，早速アルゴリズムを具体化した．後にJozsaの同僚Barthiaumeが議論に参加し，翌年の「PhysComp94」で発表した[1]．さらにオックスフォード大のBarencoが詳細な解析を行い，論文にした[2]．

Deutschの方法は頻繁に観測を繰り返さねばならず，実行は難しい．だがパイオニアたちの間にくすぶっていた「エラー訂正は不可能ではないか」との心配は吹き飛ばした．ほどなく米ベル研究所のShorらが実行可能なエラー訂正符号化を発表した．

Landauerはその後も，辛辣な量子計算批判を繰り返した．だがその指摘はしばしば要所を突いており，量子論におけるEinsteinのように，研究者たちを奮起させた．「ある意味で研究の最大の功労者だった」と先駆者たちは述懐している．

参考文献

1) A. Berthiaume, D. Deutsch, and R. Jozsa, PhysComp'94, IEEE Computer Society Press, 60–62, (1994).
2) A. Barenco, A. Berthiaume, D.Deutsch, A. Ekert, R.Jozsa and C. Macchiavello, *SIAM J. Comput* **26(5)**, 1541–1557, (1997).

古田 彩 (日本経済新聞社科学技術部)

多体エンタングルメント情報処理

井元　信之

1. はじめに

エンタングルメントは物理的に分離できる複数の系にまたがる量子力学的状態である．通常は空間的に分離された系を考え，全系が個々の系の状態の直積やそれらの確率的混合で書かれない状態にあることを指す．最も簡単なものは2体の2準位系で，その最大エンタングルメント状態はベル状態と呼ばれる．

2体の2準位系を多体の多準位系に一般化する道筋として，多体の2準位系の方向や，2体の多準位系の方向がある．本稿では主に多体の2準位系に関して，一般論およびクラスターステートを用いた一方向量子演算について述べる．

2. 多体エンタングルメント

2.1 LOCC 操作

エンタングルしていない複数の系をエンタングルさせるには，それらの系を直接相互作用させる必要がある．引き離したままでは，どんな努力を払っても，エンタングルメントはできない．

この「引き離したまま行う最大限の努力」を正確に言ったものがLOCC（Local Operation and Classical Communication：個別の量子力学的操作と古典通信）である．すなわち，相互作用させないのだから量子力学的操作はそれぞれの系に個別に施すしかなく，できる最大限のことと言えば操作間に相関を持たせるべく連絡を取って（1回とは言わず，ときには延々と）操作することである．

「2体の2準位系の最大エンタングルメントはベル状態」と書いたように，エンタングルメントには強い弱いがある．LOCCによって無から有のエンタングルメントは発生しないが，より定量的には，LOCCで弱いエンタングルメントが強められることはない．このように「その操作で作れない，あるいは増やせない」という関係において，エンタングルメントとLOCC操作には密接な関係がある．

LOCCにさらに制限をかけたものにLUがある．物理操作のうち，純粋状態を純粋状態に変え内積も変えない——すなわち散逸やデコヒーレンスを含まない——ものはユニタリー変換と呼ばれるが，ローカルな操作をユニタリー変換に限定し，かつそれぞれの系で連絡をとらず独立に操作することを，LU（Local Unitary）と言う．また，決定論的なLOCCでなく確率的操作を許したものをSLOCC（Stochastic LOCC）と言う．

2.2 2体系

2準位系は量子ビットと呼ばれるが，その2つの準位の状態を $|0\rangle, |1\rangle$ とする．量子ビットが2つある場合，例えば量子ビットAが $|0\rangle$ でBが $|1\rangle$ の状態は $|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B$ と書くが（$\otimes$ はテンソル積），それを $|01\rangle$ などと略記する．この略記を使うと，ベル状態の一つである $|\psi^-\rangle$ は

$$|\psi^-\rangle \equiv \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

と書かれる．この式で $-$ を $+$ にした $|\psi^+\rangle$，さらにこれらの 01 と 10 をそれぞれ 00 と 11 に置き換えた $|\phi^-\rangle$ と $|\phi^+\rangle$ の総勢 4 通りの状態をベル状態と呼ぶ．これら 4 つの状態は LU によって——実際には 1 つの量子ビットだけへのユニタリー変換だけで——自由に移し替えることができる．

ベル状態は互いに直交するので，上のことは，1 つの量子ビットに触るだけで直交する 4 状態を作ることができることを意味する．具体的には $\hat{I}$, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ すなわち (1) 何もしないか, (2) ビット反転するか, (3) ビットと位相反転するか, (4) 位相だけ反転するかで，2 ビットの古典情報をエンコードできる．このことは，他とエンタングルしていない単独の量子ビットの場合直交する状態が 2 つしかないということと対比的である．すなわち単独量子ビットに $\hat{I}$, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ を施しても 2 つ以上の直交状態はできず，結果 1 古典ビットしか符号化できない．ところがベル状態ならば片方の量子ビットへのアクセスだけでも 2 古典ビットの符号化ができるわけである．これは superdense coding と呼ばれる．

ベル状態から SLOCC によって，エンタングルメントのない状態を含め任意の 2 量子ビット状態を生成できる．しかしその逆はできない．この意味でベル状態は 2 量子ビット系の最大エンタングル状態である．ベル状態にある一対の量子ビットはベルペア，あるいは EPR ペアとも呼ばれる．

2.3 3 体系

量子ビットが 3 つの場合，GHZ 状態と W 状態というエンタングル状態がある．量子ビット A, B, C に関し $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \otimes |0\rangle_C$ のことを $|000\rangle$ などと略記することにすると，3 体の GHZ 状態は

$$|\mathrm{GHZ}_3\rangle \equiv \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

と定義される．ここで $+$ を $-$ に代えたり 0 を 1 に代えることにより総勢 8 通りがあるが，それらは LU で移り変わるので，その意味で GHZ 状態は 1 種類である．3 体の W 状態は

$$|\mathrm{W}_3\rangle \equiv \frac{|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

およびこれと LU で移り変わるものと定義される．(2) 式の規格化定数 $1/\sqrt{2}$ や (3) 式の $1/\sqrt{3}$ は，誤解ない場合は省略されることがある．

GHZ_3 状態から W_3 状態へは，またその逆も，LU でも LOCC でもあるいは確率的 LOCC（SLOCC）でも移り変わらないことが示されている[1)]．この意味で**3 量子ビット系は 2 種類のエンタングルメント（GHZ と W）がある**と言われる．

2.4 4 体およびそれ以上の系

量子ビットが 4 個以上の場合も GHZ 状態と W 状態は同様に定義される．n 量子ビットの GHZ_n 状態は「n 個全部 0」と「全部 1」の 2 通りの状態の等重率重ね合わせであり，W_n 状態は「1 つだけ 1」という n 通りの状態の等重率重ね合わせである[*1)]．ではこれ以外のエンタングルメントがあるだろうか？

4 体以上になると，LOCC や SLOCC で移り変わるか否かという観点では，万人を納得させられる意味のあるエンタングルメント分類ができないことがわかっているが，GHZ でも W でもない，重要なエンタングル状態がある．例えばクラスターステート[2)]やそれを特殊な場合として含むグラフステート[3)]と呼ばれるものである．

クラスターステートについては後でまた立ち戻るとして，ここでは定義だけ述べておく．クラスターステートは「量子ビットを平面格子状に並べ，まず全量子ビットを独立に $|+\rangle \equiv \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ の状態に準備し，次に隣り合う量子ビット間に制御位相反転[*2)]（C–Z と書く）を施し，全量子ビットがエンタングルするようにした状態」である．C–Z をかけた量子ビット間を図 1 のように線（辺：edge）で結んで示す．最終的にできるクラスターステートはどの edge から先に C–Z をかけるかの順序に依らない．

図 1 (a) は直線状 2 量子ビットクラスターステー

---

*1) 2 体も同じでこの場合両者ともベル状態となる．

*2) 制御位相反転は制御ノットとともに「基本的な 2 体演算」の一種．

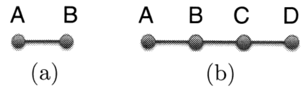


図1　直線状クラスターステート．各量子ビットは $|+\rangle$ に準備され，実線（edge）で結ばれた量子ビット間に C–Z 演算を施す．(a) 2 量子ビット系，(b) 4 量子ビット系．

トである．(a) の初期状態は（簡単のため規格化定数は省いて）$|++\rangle = |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle$ であるが，これに制御位相反転すなわち「両量子ビットが1のときのみ波動関数の符号を反転」させると，2量子ビットクラスターステートは $|C_2\rangle = |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle$ となる．これは直ちに $|0\rangle_A|+\rangle_B + |1\rangle_A|-\rangle_B$ であることが見てとれるが，これはベル状態に他ならない．例えば量子ビット B だけ基底変換（=LU の一種）を施して $|+\rangle$ を $|0\rangle$，$|-\rangle$ を $|1\rangle$ と読み替えれば $|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B$ となる．

このように「LU の範囲で等しい」ことを $=^{(LU)}$ と書くと，図1(b) の4量子ビット直線状クラスターステート $|C_4\rangle$ は

$$|C_4\rangle =^{(LU)} |0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle \tag{4}$$

となる．テレポーテーション型量子演算に用いられる χ ステートも[4]，LU の範囲で $|C_4\rangle$ に等しい．

グラフステートは「全量子ビットを独立に $|+\rangle$ の状態に準備し，任意の2つの量子ビットの間に制御位相回転（C–θ）をかけ，全量子ビットがエンタングルするようにした状態」と定義される．回転角 θ が π でなく各 edge 毎に異なる**重み付きグラフステート**の場合，できあがる状態は C–Z をかける順序に依存するが，なお $\theta = 2\pi$ の整数倍ならば何もしないのでそこには edge を引かないことを意味する．

2.5 エンタングルメントの尺度

2体の量子ビット系で (a) ベル状態，(b) ベル状態とエンタングルしていない系の適当な比率の混合状態，(c) エンタングルしていない状態の3つを比較すれば，エンタングルメントの大きさは (a) が最大，(b) は中間，(c) はゼロと言うのが適切であろう．しかしそれを定量化しようと思うと，一般の多体多準位系では難しく，目的と場合に応じて様々な尺度が提唱されているのが実情である．

尺度の提唱にあたって最低限課せられる要請がある．それは

1. エンタングルしていない系に対して0となる．
2. その尺度の値の小さな状態から大きな状態へ LOCC で持って行くことはできないように定義されている．
3. 同じ尺度の値を持つ2つの状態の混合状態がより大きな値を持たないように定義されている．（凸性）これは課されないこともある．

である．

2体の場合でかつ2体全体が純粋状態の場合は（この場合量子ビットでなく多準位系でよいが）局所エントロピーと呼ばれるものが最も適した尺度になる．局所エントロピーとは2体のうち1体だけ着目した密度演算子のフォン・ノイマンエントロピーのことで，どちらの1体に着目しても同じ値となる．しかしこれは混合状態（2体全体が混合状態）の場合には適用できない．それは，そのエントロピーがエンタングルメントに起因しているのか元々の混合性によるのかわからないからである．これでは適用範囲が狭すぎる．

多次元でなく量子ビットの2体の場合は，混合状態に対しても使える尺度がいくつか提唱されており，それぞれの関係も明らかである．代表的なものにコンカレンスがある[5]．2体の量子ビット系では純粋状態も混合状態も含め，エンタングルメントの尺度は明確である．

多体の場合はエンタングルメントの分類でさえ明らかでないので，それぞれの種類のエンタングルメントの強さを定義することは困難である．

2.6 エンタングルメントの持続性

一方，多体の場合**エンタングルメントの持続性**（robustness of entanglement）という概念がある．これは「n 体から1つずつ量子ビットを除いて行ったとき，残りの系にどのくらいエンタングルメン

トが残るか？」というものである．

例えばGHZ状態では，1つでも量子ビットを捨ててしまうと残りの $n-1$ 体はたちどころにエンタングルメントのない状態になる．一方W状態は最後の2個になるまでエンタングルメントが残る．したがって持続性はGHZよりWのほうが大きい．実際どの量子ビットも同等な対称状態に話を限ると，最後の2個のエンタングルメントの大きさはW状態のときに最大になる[6]．つまりWはエンタングルメントの中で持続性が最も大きく，GHZは最も小さい．

一方，「量子ビットを棄てて行ったときの持続性」を「量子ビットを観測して行ったときの持続性」に変えたものはpersistency of entanglementと呼ばれる．これで，話は似たようなものと思うかもしれない．実際GHZ状態でどれか1つの量子ビットについて $|0\rangle$ か $|1\rangle$ かを観測してしまうと，たちどころに残りの $n-1$ 個の状態も $|0\rangle$ か $|1\rangle$ かに決まるので，エンタングルメントは一挙に消失する．W状態の場合に同じことをすると，$1/n$ の確率で $|1\rangle$ と観測されて残り全部 $|0\rangle$ と決まってエンタングルメントが消失してしまうが，それを除いた $1-1/n$ の確率で $|0\rangle$ と観測され，残りは $n-1$ 個のW状態となる．そうすると期待値としてのエンタングルメントの減り方はGHZもWも「棄てる」場合に似ているように見えるだろう．

しかしこれは $|0\rangle$ か $|1\rangle$ かという基底に限定したからであって，基底の選択の自由度まで考えるとそう単純ではない．そしてその話は一方向量子計算につながる．

3. クラスターステート

3.1 3体GHZ状態の逐次観測

3体のGHZ状態において，$|0\rangle$ と $|1\rangle$ でなく $|+\rangle \equiv \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ と $|-\rangle \equiv \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ を考える．これを逆に解いた $|0\rangle = \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}$ と $|1\rangle = \frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}}$ を(2)式に代入することにより，ただちに $|\mathrm{GHZ}_3\rangle$ は

$$\frac{|{+}{+}{+}\rangle + |{+}{-}{-}\rangle + |{-}{+}{-}\rangle + |{-}{-}{+}\rangle}{2} \tag{5}$$

となる．

ここで一つの量子ビット，例えば $|{+}{+}{+}\rangle$ などと書いた3つのうち一番左の量子ビットについて $|+\rangle$ か $|-\rangle$ かの観測を行ったとしよう．結果が $|+\rangle$ となった場合，残る真ん中と右の量子ビットの状態は明らかに（規格化も考慮して）$\frac{|{+}{+}\rangle+|{-}{-}\rangle}{\sqrt{2}}$ というベル状態になり，結果が例えば $|-\rangle$ となった場合(5)式の後ろの2項だけ残るので，残る2つの量子ビットの状態は（規格化も考慮して）$\frac{|{+}{-}\rangle+|{-}{+}\rangle}{\sqrt{2}}$ というベル状態になることがすぐ見てとれる．すなわち量子ビット1つを観測したときエンタングルメントは消えないどころか，最大エンタングル状態になっている*3)．

この「3体のGHZ状態は $|\pm\rangle$ 基底の観測に対しエンタングルメントは完全に持続する」ことを使って，以下のように**テレポーテーションのルーター**ができることがわかる．量子テレポーテーションについては既知とするのでこの号の他の記事を参照されたい．

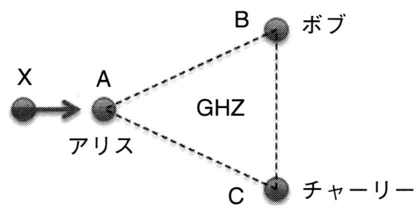


図2　GHZ_3 を用いた量子テレポーテーションルーター．ボブがBを $|\pm\rangle$ 基底で観測すればAとCはベル状態になるのでアリスからチャーリーに量子ビットXを送れる．3人の立場を入れ換えられる．

いま図2のようにアリス，ボブ，チャーリーの3人がGHZ状態にある量子ビットA, B, Cをそれぞれ手にしているとする．アリスは外部から量子ビットXをもらい，ボブかチャーリーにテレポーテーションしたい．アリスからボブにするか

*3)　W状態で同様の計算をするとこうはならない．

チャーリーにするかを3人が相談の上選択する．例えばチャーリーに送ることにした場合，ボブが $|\pm\rangle$ 基底で自分の量子ビットを観測する．その測定結果に応じて量子ビットAとCは2種のベル状態のどれかになるが，それはボブが測定結果をアリスとチャーリーに連絡すればわかる．それに基づいてアリスは量子ビットXをチャーリーにテレポートすることができる．

任意の人同士でテレポーテーションしたければ，あらゆる組合せの2人の間にベル状態を配っておくことをまず思いつくであろう．しかしその場合 $n(n-1)$ 個量子ビットが必要になってしまう．それに対し図2の本方法では n 個で済むというメリットがある．それより面白いことは，前者すなわち $n(n-1)$ 個の総組合せ事前配布法では，先にテレポーテーションのルーティングを決めてからアリスが量子ビットXを処理しなければならないのに対し，本方法すなわち逐次測定型ルーティング決定法では「先に量子ビットXをアリスが処理してからルーティングを決定する」ことも可能である．これは処理順序の自由度を広げるメリットがある．このように演算順序を通常の因果の常識に従わせる必要がないのが量子コンピューティングの一つの特徴である．

3.2 4体以上の逐次観測

同じことを3人でなく4人あるいはそれ以上の n 人が行おうと思ったら，n 体のGHZ状態を配布しておけばいいのだろうか？ 実はその答はGHZ状態だけではない．しかも，ただ単にテレポーテーションするのでなく，「何らかの量子演算を施したもの」をテレポーテーションすることが可能である．それを実現するのが**クラスターステート**を用いた**一方向量子計算**である[2]．

その発端となった演算付きテレポーテーションが「χ ステートを用いたテレポーテーション型量子計算[4]」である．これについては他の解説[7]等を見ていただくこととする．要は，逐次測定型ルーティングとテレポーテーション型量子計算を組み合わせたものがクラスターステートを用いた一方向量子計算である．

クラスターステートは観測に伴うエンタングルメントの継続性が非常によい．これから出発すれば，一つ一つの量子ビットを観測するだけで任意の量子計算が実行できる．この方法では，やりたい計算タスクのプログラミングはどのように行うか？ 2.4節でクラスターステートは「隣り合う適当な量子ビット間にC–Z演算を施したもの」と定義したが，その「適当な量子ビット」の選択と事前観測によるルーティングパスの設定が，やりたい計算の設計に相当する．

4. 一方向量子計算の実験

決まった状態であるクラスターステートに任意の入力状態 $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ を教えるにはどうするか？ 図3(a)のように入力量子ビットとクラスターステートの量子ビットにC–Zを施し，入力量子ビットの観測を行えばよいことが簡単な計算からわかる．ちなみにこのクラスターステートは図1(b)と同じ直線状のものを馬蹄形にしたものである．図3(a)では入力XをBにYをCに移し，演算結果がAとDに現れる場合を想定している．しかしこれまで行われている実験では入力状態を $|+\rangle$ とし（すなわちXやYを使わずクラスターステートそのものから出発し），そのあとLOCCで計算を行う（図3(b)）．この図3(b)で行う計算を従来の量子回路で示すと図3(c)の「C–Zに続く位相回転」演算となる．

この実験は4つの光子を用いて行われた[8]．し

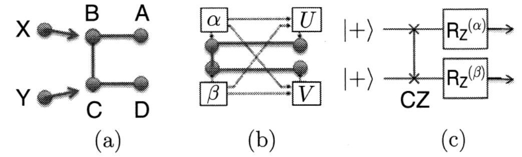


図3　クラスターステートを用いた一方向量子計算．(a) 量子ビットXの状態をBに，YをCに入力する場合．(b) BもCも $|+\rangle$ を入力，LOCCでAとDに出力．U, V はテレポーテーションの最終段で使われるユニタリー変換．(c) (b)で行われる計算の量子回路．$R_Z^{(\alpha)}, R_Z^{(\beta)}$ はそれぞれ角度 α および β だけ回す制御位相回転．

かし得られた忠実度（fidelity）は「クラスターステートを使わずエンタングルしていない量子ビットだけを用いても得られる値」である 0.854 を下回っていた．

この 0.854 という古典限界を超える実験は 2008 年になって初めて行われた[9]．それを可能とした新しいクラスターステート生成法と理論は文献 10) を参照されたい．

5. おわりに

クラスターステートを用いた一方向量子計算に代表される多体エンタングルメント量子情報処理は，既知の大規模なエンタングルメントを一旦形成すれば後は一つ一つの量子ビットを観測していくだけであるので，どんな未知の入力にもきちんと動作しなければならない C–NOT 等の演算を次々と積み重ねる必要がある従来の量子回路型情報処理に比べて，現実味があると言える．しかし「大規模なエンタングルメントを形成する」という最初の段階が簡単でないことはすぐ予想される．このため「n 体エンタングルメントを同種の $n+1$ エンタングルメントに拡張するゲート」が種々考案されている．そのゲートは n 体すべてを入力する必要はなく，そのうちの 1 つの量子ビットと新たに用意する量子ビットだけを反応させるゲートである．

これまで GHZ とクラスターステートについてはそのようなゲートが考案されていたが，W ステートにはなかった．しかし 2008 年になって，$W_n \rightarrow W_{n+2}$ と拡張するもの[11]や，$W_n \rightarrow W_{n+1}$ と拡張するもの[12]などの方法が発案された．W 状態はこれまで理論上の興味だけで GHZ 状態やクラスターステートに比べあまり使い道はないと思われてきたが，リーダー選挙やある種のゲームなどへの応用も試みられている．

このように多体エンタングルメントを直接使う量子情報処理の可能性を追求する研究は日々進められている．新しい概念や理論・実験結果が次々現れ，今後の進展に目が離せない．

参考文献

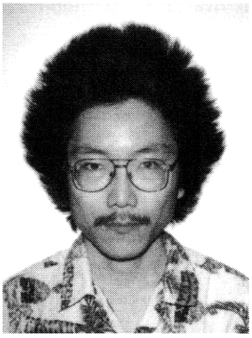
1) W. Dür *et al.*: *Phys. Rev.* **A. 62**, 062314 (2000).
2) R. Raussendorf and H.J. Briegel: *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5188 (2001).
3) D.E. Browne *et al.*: arXiv: quant-ph/0603226 / M. Hein *et.al.*:arXiv: quant-ph/0602096.
4) D. Gottesman and I.L. Chuang: *Nature* **402**, 390 (1999).
5) Wootters: *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245–2248 (1998).
6) M. Koashi *et al.*: *Phys. Rev.* **A 62**, 054303 (2000).
7) 井元信之「量子情報処理と光子の利用」オプトロニクス，2008 年 8 月号．
8) P. Walther *et al.*: *Nature* **434**, 169 (2005).
9) Y. Tokunaga *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210501 (2008).
10) Y. Tokunaga *et al.*: *Phys. Rev.* **A71**, 030301(R) (25 March 2005)/*ibid.* 020301(R) (2006).
11) T. Tashima *et al.*: *Phys. Rev.* **A77**, 030302(R) (2008).
12) Y.-X. Gong *et al.*: arXiv:0810.2705/T. Tashima *et al.*: arXiv:0810.2850.

（いもと・のぶゆき，大阪大学大学院基礎工学研究科）

作用素環賞について

東京大学数理科学研究科准教授の小沢登高氏が第三回作用素環賞を受賞されました．同氏の離散群論に関連した III 型 von Neumann 環の構造に関する業績には著しいものがあり作用素環論の発展に寄与するところ大であると高く評価されたものです．平成 20 年 11 月 21 日，大阪教育大学で開催された作用素論・作用素環論研究集会において授賞式を行われました．この賞は 4 年に一回，作用素環の分野の進展に著しく貢献した 40 歳以下の研究者に授与されます．

（作用素環賞委員会委員長　日合文雄）



小沢登高氏

最初の量子情報プロトコル

一枚の色褪せたメモがある．表題は「量子情報理論．Steve Wiesnerが僕に話したこと」．「Einstein, Rosen, Podolskyの思考実験に似た仕組みを使うと，通常1ビットしか送れないチャネルで2ビットの情報を送ることができる」として，具体的な方法が書かれている．日付は1970年2月24日．恐らく記録に残る世界初の量子情報プロトコルだ．

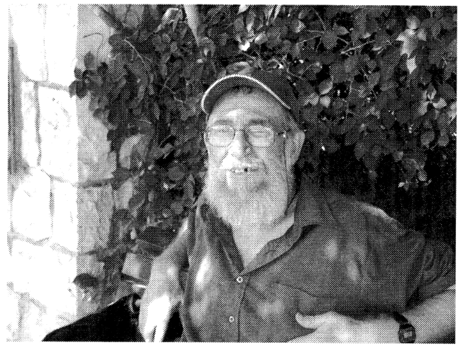
書いたのは米ハーバード大の大学院生Bennett. Wiesnerはコロンビア大の大学院生で，2人は友だち同士だった．その頃加速器実験に携わっていたWiesnerは，「研究所の近くを散歩していて，ふと加速器の粒子を使って通信したらどうなるだろうと考え始めた」と話す．情報理論は専門外だが，後にMITの学長になった電気工学者の父が情報理論の祖Shannonと親しく，関心は持っていた．

エンタングルした2つの粒子は，どんなに遠く引き離されても，片方を操作した瞬間にもう一方も変化する．2準位の粒子対を受信者と送信者に1個ずつ配り，送信者が手元の粒子を操作して4つのエンタングルメント状態のどれかを作る．送信者が粒子を送り，受信者が粒子対の状態を読み出せば，通常の倍の2ビットの情報を送れるのではないか——．

当初は受信者が粒子を個々に測定することを考えていたため，Bennettのメモには「2ビットのうち1ビットを読むと，もう1ビットは壊れる」との記述がある．だが数週間後，Wiesnerは受信者が2つを同時測定すれば2ビットをそのまま読み出せると気づいた．後にsuperdense codingと呼ばれる量子情報技術は，こうして誕生した．

一連の思索から，更に2つの量子情報技術が生まれた．1つはoblivious transferだ．受信者は送信者が送った2つのメッセージのうち1つだけを読め，どちらを読んだか送信者にはわからないという通信だ．電子投票の完全な秘密保持などを可能にする．もう1つは量子状態に通し番号を記録する，偽造不可能な量子マネーだ．

Wiesnerはまず後の2つについて論文を書いた．だが反応は散々だった．教授には「真面目な研究に戻れ」と怒られ，同僚には困惑され，学術誌には掲載を断わられた．彼はすっかり失望し，量子情報の研究から手を引いた．卒業後はスタンフォード線形加速器センターでポスドクをしていたが，じきに辞め，それきり物理学研究には戻ってこなかった．



Stephen J. Wiesner

ただ1人Bennettだけは友人の発明を忘れなかった．出版されなかった論文[1]を温め続け，1979年に暗号学者のBrassardと出会い，共に研究に乗り出した．そして1985年に量子マネーをもとにした量子暗号を発表した．

1990年，BennettはWiesnerに，以前彼が話していた高密度通信について尋ね，Wiesnerは詳細を書き送った．アイデアは完成していたが，Wiesnerはとうに発表する気を失っていた．Bennettは具体的な実験方法を考え，Wiesnerの了解を得て共著論文として発表した[2]．発明から実に22年後のことだった．

Wiesnerは現在，イスラエルのエルサレムで暮らしている．仕事からは半ば引退したが，発明への情熱は健在で，テーブルには計算メモが散乱し，庭では自作のヒートエンジンが動いている．

「Wiesnerは量子力学を直観的に深く理解していた」とBennettは言う．「彼を失ったのは量子情報にとって悲劇だった」．発明家のひらめきと，ものづくりの才能に恵まれたWiesnerは，基礎理論家が多い量子情報の先駆者の中では異色だ．もし彼が研究を続けていたら，歴史はどう変わっていただろうか．

参考文献

1) 論文はずっと後に発表された．S. Wiesner, *SIGACT News*, **15**, 1, 78, (1983).
2) C.H. Bennett and S.J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).

古田　彩（日本経済新聞社科学技術部）

量子エネルギーテレポーテーション

堀田 昌寛

1. はじめに

大まかに言って量子論には2つの基礎構成要素がある．その一つは，古典力学と同様に，物理的実態である「モノ（物）」の存在である．これは例えば電子や光子であり，もっと深く観ると素粒子の量子場およびそれを励起するエネルギーや様々な保存量を指す．量子場の理論では「何もない」という状態は真空と呼ばれ，最低エネルギーを持つ状態である．この真空状態にエネルギーを与えて場を励起すると，種々の素粒子が生成され，運動を始める．20世紀初頭に量子力学が確立して以来，宇宙にはどのような素粒子が存在するのか，究極の物質形態はどのようなものか，その運動原理は何かなど，多くの物理学者はその名の通りに「モノ（物）」の正体とその「コトワリ（理）」の解明を中心的課題に据えて研究を行い，輝かしい成果を挙げてきた．こうした流れから取り残された感もあった，量子論を支える他方の構成要素をここでは「コト（事，言）」という言葉で包括的に表現しよう．これは量子系がもつ情報の総体を指す．コトにはモノである物理系に測定を行って得られる個々の情報も含まれている．古典力学では系に何らの影響なくあらゆる情報を抜き出すことが原理的にできると考えられていたが，量子力学では状況は異なる．対象となる量子系は大変繊細であり，測定を行って何らかの情報を得る見返りに，その系の状態を大きく変化させてしまうことさえある．この量子状態の脆弱性の本質はハイゼンベルグの不確定性関係とその精密な定式化である小澤不等式[1)]によっても捉えることができる．この量子測定の誤差と物理系が受ける反作用の関係が量子力学におけるコトとモノの間の不可分な関係を一面から表現しているとも言えよう．1960年代後半頃から一部の研究者によって量子論における情報の重要性が深く認識されるようになり，情報そのものを研究対象とした量子情報理論が開拓されてきた．近年になって，量子暗号や量子計算機などの概念が提案されて以来，様々な分野の研究者の興味を惹きつけて量子情報理論は加速度的に発展するようになった．この量子論の歴史的流れの中で，モノを対象とする量子物理学とコトを対象とする量子情報理論は半ば独立に進歩してきたとも言える．これは例えば統計力学の発展の仕方と大きく異なる．しかしつい最近になってこの状況が変わる可能性が見えてきた．それは本論で紹介する新しいタイプの量子テレポーテーションの発見が物理学に深く影響を与えるかもしれないからである．このことは量子論におけるコトとモノの本質的連携から生れる新現象を探求する「量子情報物理学（quantum infophysics）」の誕生をも予感させるものである．

1993年にベネットらによって理論的に提案された量子テレポーテーション（quantum teleportation 以後簡単にQTと略す）の方法[2)]は，その後実験的に検証され，有用な量子通信技術として急

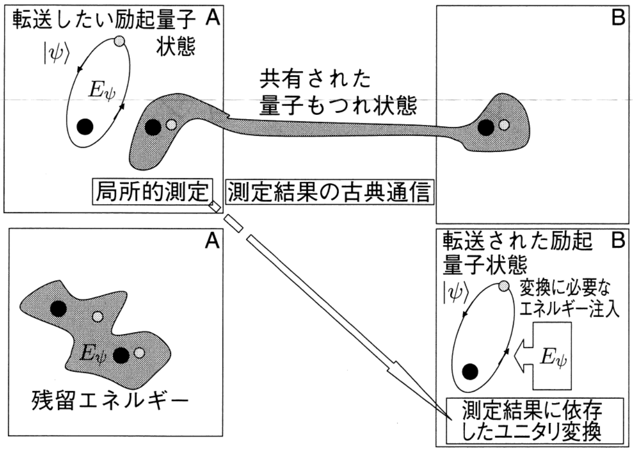


図1　量子テレポーテーションの概念図.

速に発展してきた．このQTでは，送信者Aが所有する量子系の任意の量子状態 $|\psi\rangle$ を物理的媒体に載せることなく空間的に離れた受信者Bに送ることができる．図1にこの概念図を与えた．QTを行なう前にAとBは量子的にもつれている2つの量子系を共有している必要がある．量子もつれに関しては後で触れることにする．共有されている量子もつれ状態には転送される $|\psi\rangle$ の情報は含まれていない．Aは手元の量子系（$|\psi\rangle$ の状態にある系と量子もつれ系の片方）に対して量子測定を行い，得られた測定結果を古典通信でBに伝える．Bはその測定結果に応じて適当なユニタリ変換を選択してBが所有している量子的にもつれた他方の量子系に施す．するとAが持っていた状態 $|\psi\rangle$ がBの量子系に転送されてくることが証明される．このQTの方法では，転送される量子状態がエネルギー E_ψ を持つ励起状態である場合，$|\psi\rangle$ を再生するBは同じ量のエネルギー E_ψ を別途手元に持っている必要があった．もともとのAの量子系が持っていたエネルギー E_ψ はAの周辺にそのまま残留してしまうのである．つまり従来の方法ではコトに当たる量子情報は転送できるが，モノに当たるエネルギーは転送できないのである．この事実は一見自然な結果にも思えるかもしれない．エネルギーは局所的保存量であり，QTで行われる操作も局所的であるからである．しかも送信者と受信者の間は携帯電話などによる古典通信でしか繋がっていない．では，本当にモノであるエネルギーは局所的操作と古典通信のみで輸送することはできないのだろうか．驚くべきことに量子力学では，因果律やエネルギーの局所的保存則などの通常の物理法則を破らずに，このエネルギー輸送を実現できるのである[4~6]．以下ではこの新しいQTの方法を量子エネルギーテレポーテーション（quantum energy teleportation）と呼び，QETと略す．このQETでは，物理的媒体にエネルギーを移して輸送する必要がなく，代わりに送信者が古典情報を受信者に連絡することでエネルギーを転送することが可能となるという手品のようなことを実現する．以下では手順を追って，QETを解説していこう．

2. 量子もつれと負のエネルギー密度

QETを解説する準備として，そのコト側のタネである量子もつれとモノ側のタネである負のエネルギー密度から説明しよう．量子もつれとは，2個以上の部分系がなす合成系の量子状態において個々の測定結果の間に現れる量子的相関のことである．強い量子もつれ状態の例として有名なのは，2個の2準位スピンにおける次のスピン1重項状態（合成角運動量が零の状態）である．

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right).$$

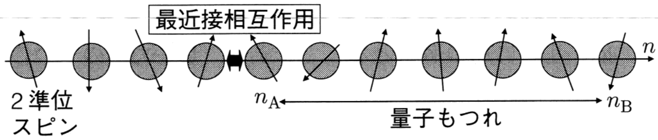
ここで $|+\rangle$ はスピン z 軸成分のアップ状態，$|-\rangle$ はダウン状態である．この式から，$|\Psi\rangle$ の状態でそれぞれのスピン z 軸成分を測ると，$(+-)$ または $(-+)$ というように，必ず互いに逆の値をとることがわかる．z 軸方向の実験だけに限ればこのようなことは古典相関でも実現できるが，$|\Psi\rangle$ の特徴的な点は x 軸成分や y 軸成分などの他の任意方向のスピン軸成分の測定でも，必ずそれぞれのスピンの測定値は逆の値をとるということである．従って任意にスピン軸方向を定めて一方のスピン系だけを測定した場合，100%の確率で測定をしていない他方のスピン系の測定結果を予言できるという特徴がある．この一方の測定結果から他方の量子状態の情報を得ることができるという量子もつれの性質はQTやQETにおいても本質的役割を担う．量子もつれの重要な性質は，強くするには必ず部分系の間で多体ユニタリ変換などの大局的な相互作用をさせる必要があるということである．部分系に対する局所的量子操作では量子もつれは変化しないか，もしくは弱くなるかのどちらかとなる．また2体以上の相互作用をもつ多体系での基底状態（最低エネルギー状態）に量子もつれが極当たり前に現れることも重要である．例えば，多数の2準位スピン系を1次元的に並べて作られるスピン鎖系で，最近接相互作用（1体相互作用と隣り合ったスピンの間だけに働く2体相互作用）のみを考える単純な場合でさえも，その基底状態は量子的にもつれているのが普通である．このスピン鎖系の例として図2には，実結合定数 B，J および ε で特徴付けされるイジングスピン鎖モデルを与えた．ここで σ_x^n と σ_z^n はサイト n のスピンのパウリ行列の x 成分と z 成分であり，I_n はサイト n のスピンに対する単位行列である．この簡単なモデルでも，B や J を微調整しない限り，基底状態には量子もつれが存在することが知られている．また場の理論においてもハミルトニアンの運動項の存在のために真空状態（場の理論の基底状態）にも量子もつれがあることが知られている[3)]．この量子多体系の基底状態における量子もつれがQETにおいて重要な役目を果たす．

次にQETのもう一つのタネである量子多体系における負のエネルギー密度の存在を簡単に説明しよう．量子力学の一つの特徴は，最低エネルギー状態でも各部分系では量子的な揺らぎが消えずに残っているという点である．更に状態の重ね合わせによる量子干渉効果によって，ある部分系の量子揺らぎを，基底状態での揺らぎより更に小さくすることが可能である．今のような一般相対論的現象ではない場合にはエネルギーの値そのものには意味がなく，エネルギーの差だけが物理に効いてくることに注意して，エネルギー密度の原点を基底状態での期待値が零になるように定義しよう．この結果自動的にエネルギーの最低固有値（基底状態の固有値）も零と定義される．この定義から基底状態より更に量子揺らぎが小さくなった領域は負のエネルギー密度を持つことになる．逆に見れば，基底状態の量子揺らぎは，特定の状態での量子揺らぎに比べて，局所的にはより高いエネルギーを持っているように振る舞うのだ．QETではこの基底状態の局所的な揺らぎのエネルギーを情報理論的手法で取り出すことになる．なお全系におけるエネルギーはもちろん負にはならないことは常に保証されている．このためある領域で負のエネルギー密度が生じても，それを補うように他の領域では十分な正のエネルギーを持つことになる．

3. 局所的量子測定による基底状態の励起と，その局所的冷却における残留エネルギー

次に量子多体系の基底状態における量子揺らぎの局所的測定を考えよう．例えば図2のイジングスピン鎖系においてサイト n_{A} にあるスピンの量子揺らぎの測定を行う．この場合例外的な測定を除いて，測定後の状態のエネルギーは正となる．つまり古典論とは異なり，量子測定には一般にエネルギー注入が必要なのである．測定時間が十分に短ければ，そのエネルギーはサイト n_{A} 近傍のスピンのみに集中していることもわかる．このサ

ハミルトニアン：$H=-\sum_n(B\sigma^z{}_n+\varepsilon)-\sum_n J\sigma^x{}_n\sigma^x{}_{n+1}=\sum_n T_n$



エネルギー密度：$T_n=\sum_{\gamma=1}^{3}O^{(n,\gamma)}{}_{n-1}\otimes O^{(n,\gamma)}{}_n\otimes O^{(n,\gamma)}{}_{n+1}$

$$O^{(n,1)}{}_{n-1}=I_{n-1},\ O^{(n,1)}{}_n=-B\sigma^z{}_n-\varepsilon,\ O^{(n,1)}{}_{n+1}=I_{n+1},$$

$$O^{(n,2)}{}_{n-1}=I_{n-1},\ O^{(n,2)}{}_n=-\frac{J}{2}\sigma^x{}_n,\ O^{(n,2)}{}_{n+1}=\sigma^x{}_{n+1},$$

$$O^{(n,3)}{}_{n-1}=\sigma^x{}_{n-1},\ O^{(n,3)}{}_n=-\frac{J}{2}\sigma^x{}_n,\ O^{(n,3)}{}_{n+1}=I_{n+1}.$$

図2　イジングスピン鎖系.

イト n_A 近傍に溜まっているエネルギーを，サイト n_A 近傍のスピンに対する**任意の**局所的量子操作（もちろん局所的測定や局所的ユニタリ変換も含まれる）を用いて系から完全に抜き去ることができるかを考えてみよう．実はすべてのエネルギーを取り去ることは一般的にはできないことが示せる[5]．これは基底状態に施した局所的測定が，サイト n_A から離れたサイト（例えば図2のサイト n_B）のスピンとの間の量子もつれを壊してしまうことに起因する．測定後の励起状態からもとの基底状態に戻すには，この壊した量子もつれを復活させる必要がある．しかし量子もつれは大局的操作でしか生成できないため，サイト n_A 近傍の部分系に対する局所的操作だけでは，量子もつれを復元することができない．従ってサイト n_A にいる実験者Aは，目の前の部分系にエネルギーが溜まっているにも拘らず，そのエネルギーの一部は自分で使用することができないのだ．ではこの局所的に使用不可能な残留エネルギーは誰ならば使用できるのだろうか．実はサイト n_A のスピンとの量子もつれを壊された遠方のスピンの前に立つ別な実験者（例えばサイト n_B にいるB）ならば，そのエネルギーの一部を使用できることが示せるのである．この具体的方法がQETである．

4. スピン鎖系でのQET

準備が整ったので，最近接相互作用をする2準位スピン鎖系を用いてQETを具体的に説明しよう．スピン鎖系のハミルトニアンはエネルギー密度演算子 T_n のサイト和で以下のように書けている．

$$H=\sum_n T_n.$$

ここで n のサイト和はすべてのスピンサイトに関してとられているが，例えば無限個のスピンからなるスピン鎖ならば負の無限大から正の無限大までの整数和で書くことができる．最低エネルギー固有値が零になるように T_n は定数だけずらされているため，基底状態 $|g\rangle$ に対して $H|g\rangle=0$, $\langle g|T_n|g\rangle=0$ という性質がある．以下では，H が生成する全体系の時間発展に比べて量子測定や古典通信に掛かる時間は十分に短く，QETの操作中には系の時間発展は無視できるとしよう．（なお，この条件は議論を簡単にするためだけに課せられており，次の量子場でのQETでは外される．）またQETにおけるエネルギー送信者Aはサイト n_A におり，受信者Bは $|n_A-n_B|\geq 5$ を満たす十分離れたサイト n_B にいるとしよう．このときQETは次の3つの手順で構成される．

(I)　基底状態 $|g\rangle$ において，Aは3次元実単位

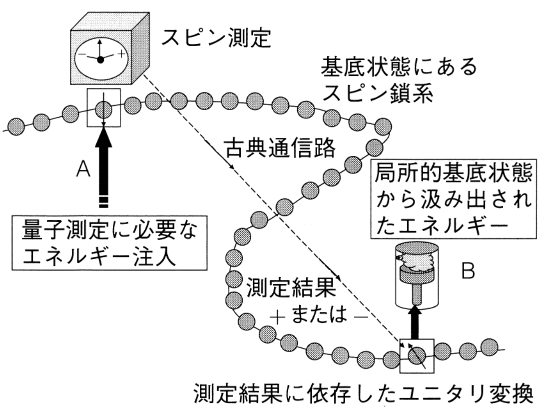


図3　スピン鎖の QET プロトコル．

ベクトル $\vec{u}_{\mathrm{A}}$ とパウリスピン行列ベクトルから作られる $\sigma_{\mathrm{A}} = \vec{u}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{\sigma}_{n_{\mathrm{A}}}$ という局所的観測量を自分のスピンに対して測定する．この測定値は $s = \pm 1$ のどちらかの値をとる．

(II)　A は測定結果 s を古典通信で B に知らせる．

(III)　B は測定結果 s に応じた下記のユニタリ変換を自分のスピンに対して施す．

$$V_{\mathrm{B}}(s) = I \cos\theta + is\sigma_{\mathrm{B}} \sin\theta, \ (\sigma_{\mathrm{B}} = \vec{u}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{\sigma}_{n_{\mathrm{B}}}) \tag{1}$$

ここで $\vec{u}_{\mathrm{B}}$ は3次元実単位ベクトルであり，実角度変数 θ は B が最も多くのエネルギーを得られるように後で決定する．

このプロトコルを図3にまとめておいた．ここで便利のために σ_{A} のスペクトラル分解

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \sum_{s=\pm 1} sP_{\mathrm{A}}(s) \tag{2}$$

を導入しておこう．$P_{\mathrm{A}}(s)$ は固有値 s に対する固有ベクトル空間への射影演算子である．(I) の後で，スピン鎖系のエネルギーの期待値は

$$E_{\mathrm{A}} = \sum_{s=\pm 1} \langle g|P_{\mathrm{A}}(s)\, HP_{\mathrm{A}}(s)\, |g\rangle$$

で与えられ，そのエネルギーは A 近傍に局在している．E_{A} は一般的には零にならず正の値をとる．前節の議論のようにこの E_{A} 自体は A の目の前にあるにも拘らず，量子もつれ破壊のためにその一部は A にとって使用不可能なエネルギーになっている．(III) の直後では，各測定結果の現れる確率で平均された量子状態は，系の時間発展を無視して

$$\rho = \sum_{s=\pm 1} V_{\mathrm{B}}(s)\, P_{\mathrm{A}}(s)\, |g\rangle\langle g|P_{\mathrm{A}}(s)\, V_{\mathrm{B}}^{\dagger}(s) \tag{3}$$

という混合状態で書ける．最近接相互作用を考慮して B 周辺に局在するエネルギー演算子を $H_{\mathrm{B}} = T_{n_{\mathrm{B}}-1} + T_{n_{\mathrm{B}}} + T_{n_{\mathrm{B}}+1}$ で定義すると，(III) の後の B 周辺のスピン鎖のエネルギー期待値は $\mathrm{Tr}[\rho H_{\mathrm{B}}]$ で与えられる．(1)–(3) 式を使って，直接計算をすると

$$\mathrm{Tr}[\rho H_{\mathrm{B}}] = \frac{\xi}{2}(1 - \cos(2\theta)) + \frac{\eta}{2}\sin(2\theta) \tag{4}$$

という結果を得る．ここで ξ は $\xi = \langle g|\sigma_{\mathrm{B}}^{\dagger} H \sigma_{\mathrm{B}}|g\rangle$ で与えられる非負の実数である．また η は A と B の（準）局所的演算子による基底状態での2点相関関数 $\eta = \langle g|\sigma_{\mathrm{A}}\dot{\sigma}_{\mathrm{B}}|g\rangle$ で与えられる．ここで $\dot{\sigma}_{\mathrm{B}}$ は $\dot{\sigma}_{\mathrm{B}} = i[H_{\mathrm{B}}, \sigma_{\mathrm{B}}]$ で与えられる準局所的演算子である．σ_{A} と $\dot{\sigma}_{\mathrm{B}}$ というエルミート演算子は A の地点と B の地点が空間的に離れているために互いに可換である．このことから相関関数 η の実数性も導かれる．また基底状態 $|g\rangle$ が A と B 近傍のスピンの間の量子もつれをもつとき，一般的には η が零ではないことが示せる．逆に $|g\rangle$ が量子もつれを持たないときは常に $\eta = 0$ となる．(4) 式の驚くべき特徴は，$\eta \neq 0$ のときに θ の値をうまくとってやると必ず $\mathrm{Tr}[\rho H_{\mathrm{B}}]$ が負になるという点である．最も小さくなる θ は

$$\cos(2\theta) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \sin(2\theta) = -\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

を満たす場合であることはすぐわかる．この結果を (4) 式に代入すると $\eta \neq 0$ のとき

$$\mathrm{Tr}[\rho H_{\mathrm{B}}] = \frac{1}{2}\left[\xi - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right] < 0 \tag{5}$$

という結果を得る．(III) の前に B 周辺のスピン鎖部分ではエネルギー密度が零だったにも拘らず，(III) の過程終了後に負のエネルギー密度を持っているということは，その差分の正のエネルギー

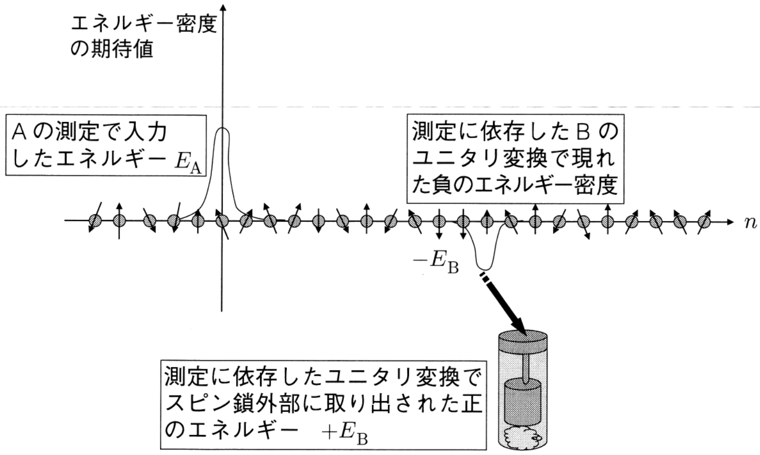


図 4　QET におけるスピン鎖のエネルギー密度分布.

が外部に放出されたことを意味する．具体的には (III) のユニタリ変換を施す装置にスピン鎖が正の仕事を行ったことになる．その正のエネルギー $E_{\rm B} = -{\rm Tr}\,[\rho H_{\rm B}]$ を B は回収して自由に使うことができる．この過程のエネルギー密度の期待値を図 4 に与えた．もとは基底状態にあったスピン鎖から B は A の測定結果を用いてエネルギーを取り出すことに成功したのである．なお η が大きいほど $E_{\rm B}$ を大きくできる．そのため十分に離れた B に転送するには 2 点関数の相関距離が非常に大きくなる相転移近傍の 1 次元スピン鎖系が好ましい．また $E_{\rm B}$ は決して A の注入したエネルギー $E_{\rm A}$ の値を超えることはない．さらに $E_{\rm A}$ のうち A が局所的に使用できないエネルギーの値も超えることはないことも示せる[5]．従って $E_{\rm A}$ が零ならば $E_{\rm B}$ も零となってしまう．これらのことから B は A の注入したエネルギーの一部を担保にしてスピン鎖の（局所的）基底状態からエネルギーを前借したと理解される．スピン鎖に残った負のエネルギーは後で起こる全体系の時間発展によって拡散し，A の注入したエネルギーと混ざって B の作った借りは相殺される．この QET のメカニズムは，簡単に次のようにまとめることができる．(I), (II) によって B は量子もつれを通じて A の測定結果から B 周辺の量子揺らぎの情報を得て，(III) でうまくその揺らぎにあったユニタリ変換を選んで量子揺らぎをより抑制して負のエネルギー密度領域を作り出し，その差分のエネルギーをスピン鎖から取り出したということである．基底状態の量子揺らぎは状態の線形重ね合わせの形で様々な揺らぎの成分が存在している．従って基底状態に量子操作を行っても，ある成分の揺らぎは小さくなるが他の成分の揺らぎは大きくなるようになっており，平均してエネルギー密度は上がってしまう．しかし QET では B 周辺の揺らぎは A の測定によって特定の成分に限定される．その限定された成分の揺らぎだけを抑制する量子操作を選べば，平均として B 領域のエネルギー密度を下げることができるのである．基底状態は最低エネルギーという意味で「何もない」状態であり，そのままではエネルギーを抜き出せない状態である．しかしそこには量子もつれという資源が隠れていて，局所的量子測定によって注入されたエネルギーの一部は，この量子もつれによって離れた地点に実質的に転送されているのである．そして測定結果さえ知っていれば，誰でもエネルギー密度が零のスピン鎖部分からエネルギーを抽出することができるのである．

5. 量子場の真空状態における QET

QET はスピン鎖に限らず，量子的にもつれた基底状態をもつ量子多体系において起こすことができる．この節では 1 次元零質量スカラー場 $\hat{\phi}$ に対

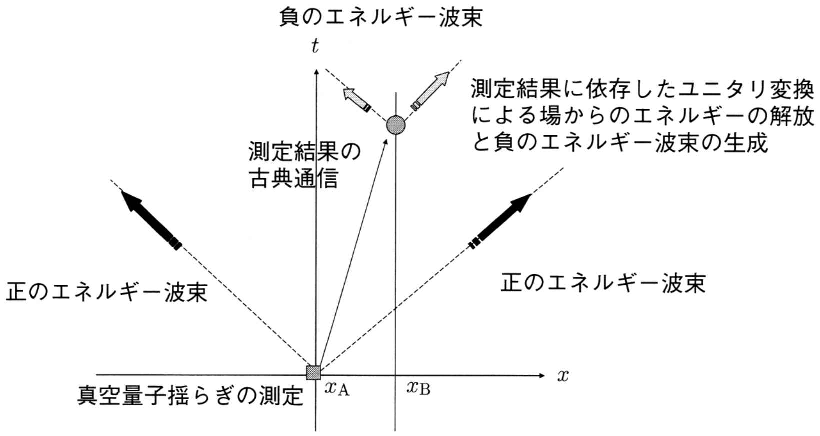


図 5　量子場における QET.

する QET[6]を紹介する．光速度を 1 にする単位系をとると，その場の運動方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\hat{\phi}(t,x)=0$$

で与えられる．この場合スピン鎖系と異なり，系の時間発展の速度が古典通信の速度と同じであることが特徴である．またスピン鎖系では局所的測定として理想測定を採用できたが，場の理論では，場の量そのものの理想測定は特異的になってしまい，うまく定義されない．これらのことから QET の構成も少し工夫がいる．送信者 A は $x_{\rm A}$，受信者 B は A から十分に離れた $x_{\rm B}$ にいるとしよう．そして量子場系を真空状態 $|0\rangle$ にとり，A はスピン z 軸のアップ状態になっている 2 準位スピン系を用意する．このとき QET は次の流れで行われる．(I) A は時間に依存した結合定数 $g(t)$ を含む次の相互作用で場とスピンを結合させる．

$$H_{int}=g(t)\left(\frac{\pi}{4}-\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_{\rm A}(x)\hat{\Pi}(x)dx\right)\otimes\sigma_{\rm A}^{y}.$$

ここで相互作用時間は十分に短くとり，$g(t)=\delta(t)$ と近似する．$\lambda_{\rm A}(x)$ は A 近傍のみ値をもつ実関数であり，$\hat{\Pi}(x)$ は場の正準共役運動量演算子であり，$\sigma_{\rm A}^{y}$ は A のスピンのパウリ行列 y 成分である．この相互作用によって場の状態の情報の一部はスピン系に移る．相互作用が切れた後，A はスピンの z 軸成分を理想測定する．その結果は $s=\pm1$ のどちらかになる．この理論測定も短時間で行われ，時刻 $t=+0$ には終了しているとしよう．(II) スピンとの時間に依存した相互作用のために，場にはエネルギー

$$E_{\rm A}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\lambda_{\rm A}(x)}{\partial x}\right)^2dx$$

が注入され，それをもとにした波束が生成されて左右に分かれて光速度で伝播していく．B の位置にもその一つの波束は通過するが，B はそれからエネルギーを取り出すタイミングを逸して，素通しさせてしまったとしよう．波束の通過後，B の周辺はもとの真空状態のときと同じ零エネルギー密度領域に戻ってしまう．しかし B は以下のように落胆せずにすむのだ．(III) A はスピンの測定結果 s を B に伝える．(IV) 測定結果 s を得た B は時刻 $t=T$ において s に依存した次のユニタリ変換を自分の周辺の場の自由度に作用させる．

$$U_{\rm B}(s)=\exp\left[igs\int_{-\infty}^{\infty}p_{\rm B}(x)\hat{\phi}(x)dx\right].$$

ここで $p_{\rm B}(x)$ は B 周辺のみで値をもつ実関数であり，実パラメタ g は B が最大のエネルギーを取り出すように決める．このユニタリ変換に掛かる時間は十分短く，QET の過程において無視できるとしよう．この操作の結果として，量子場系には負のエネルギーをもった波束が発生して左右に分かれて光速度で伝播を始める．B 周辺のエネルギー密度は (IV) の直前には零であったので，計算で得られる差分のエネルギー

$$E_{\mathrm{B}}=\frac{|\langle 2\lambda_{\mathrm{A}}|0\rangle|^2 I(\lambda_{\mathrm{A}},\ p_{\mathrm{B}})^2}{2\pi^2\int p_{\mathrm{B}}(z)^2 dz}$$

が仕事として外部に取り出されることになる．ここで $I(\lambda_{\mathrm{A}},\ p_{\mathrm{B}})$ は

$$I(\lambda_{\mathrm{A}},\ p_{\mathrm{B}})=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\lambda_{\mathrm{A}}(x)p_{\mathrm{B}}(y)\times\left[\frac{1}{(x-y-T)^2}+\frac{1}{(x-y+T)^2}\right]$$

であり，$|2\lambda_{\mathrm{A}}\rangle$ は場の振幅が $2\lambda_{\mathrm{A}}(x)$ で与えられるコヒーレント状態である．このプロトコルを図 5 にまとめた．

6. おわりに

ここで紹介した QET は物理的媒体を使わずに古典情報を送信するだけでエネルギーを転送できる新しい物理現象である．基底状態の量子揺らぎに基づいたメカニズムであるためにミクロな量のエネルギーしか現実的には送れないと考えられるが，最近活発に研究開発されている極小エネルギーで駆動するナノマシンなどへの応用が期待される．また工学的応用を超えて物理自身として深いものを QET は含んでいると思われる．コトとモノの本格的協同から生まれる新奇な現象もまだまだあるかもしれないと感じさせ，今後の展開に胸躍る思いである．

参考文献

1) 小澤正直「エンタングルメントと不確定性関係」本誌 2005 年 2 月号.
2) C.H. Bennett *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895. 日本語の教科書では，林正人著『量子情報理論入門』（サイエンス社，2004）P.170 などを参照.
3) A. Retzker *et al*, *Phys. Rev. A* **71** (2005) 042104.
4) M. Hotta, arXiv:0803.0348.
5) M. Hotta, *Phys. Lett. A* **372** (2008) 5671.
6) M. Hotta, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 045006.

（ほった・まさひろ，東北大学大学院理学研究科）

11 日間の議論

1992 年 11 月．カナダのモントリオール大でのセミナーで，米ウィリアムズカレッジの Wootters が，イスラエル工科大の Peres と発表した論文について話していた[1]．アリスとボブが各々，同じ状態（直交しない 3 つの状態のどれか）にある粒子を 1 個ずつ持っている．2 人がどんな測定や通信をすれば，その状態が分かるだろうか？ Wootters は局所操作＋古典通信の範囲では最良と思われる方法を示した．

講演の後，もっと良い測定をするには何が必要か議論になった．米 IBM の Bennett が手を挙げ，冗談めかして言った．「2 人に EPR ペアをやったらどうだろう？」

やにわに議論は盛り上がった．モントリオール大の Crépeau は「それぞれが自分の粒子と，EPR ペアの片方との相関を調べたらどうなる」と問いかけた．時間が来てセミナーは散会したが Wootters，Bennett，Crépeau，そしてモントリオール大の Brassard と Jozsa は，電子メールで議論を続けた．

「アリスが自分の粒子と EPR ペアの片方を測定してシングレットだったら，ボブが持つ方はアリスの粒子と同じ状態になる」と Bennett が皆に書き送ると，Wootters が「測定結果がシングレットでなくても，ボブの側の操作でアリスの粒子と同じ状態を作ることはできる」と応じた．これが啓示だった．アリスの粒子の状態を，局所操作と古典通信でボブの粒子に再現する――．新しい量子情報技術の可能性が見えてきて，「みんな夢中になった」(Jozsa)．

この頃遅れて議論に加わった Peres は，当初話が飲み込めず戸惑っていた．Bennett は言った．「つまり，アリスの粒子をボブの研究室に『テレポート』できるということなんだ」．このときから，新技術は，「量子テレポーテーション」と呼ばれるようになった．

モントリオールでの議論から 11 日後の 12 月初め，6 人は論文を書き上げた[2]．量子情報の歴史に残る発明が世に出るのは，翌 1993 年の春である．

参考文献

1) A. Peres and W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **66**, (1991) 1119.
2) 本特集記事「量子エネルギーテレポーテーション」の文献 2).

古田　彩（日本経済新聞社科学技術部）

特集／発展する量子力学

量子力学の展望

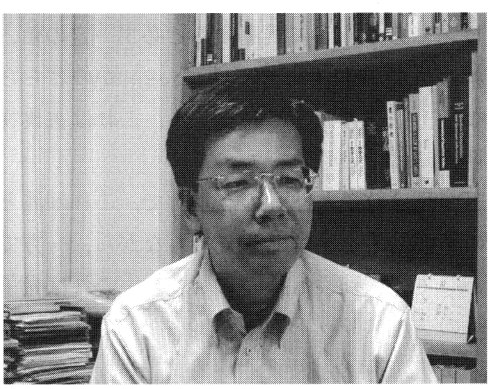
筒井　泉（聞き手：編集部）

1. 量子力学の完成と発展

――近年，量子力学の発展には目覚ましいものがありますが，そもそも歴史的にはどういった経緯で発展してきたのでしょうか．

量子力学は19世紀の終わり頃に様々な物理現象の中で，今で言う古典物理学を用いて説明できないことが出てきたので，それに対応するために始まりました．そして，様々な試行錯誤を経て，プランクやボーアなどによって，1900～20年代初め頃に現在，前期量子論と呼ばれているものが創られました．

その後，1920年代の半ば頃にハイゼンベルクが行列力学を提案し，ほぼ同時にシュレディンガーが波動としてのシュレディンガー方程式を提出しました．のちに，これら2つは実は同じものだということがわかります．



筒井 泉氏．

そうすると，古典物理学では困難であった水素原子のスペクトルの問題もすっきりと理解できるようになりました．実は，この問題は，前期量子論の枠組みでもある程度のところまでは説明できるようになっていたのですが，全体として整合性のある理論になっていなかったのです．

その後，ディラックやフォン・ノイマンといった人たちが数学的な整備をして，1930年代の初め頃に量子力学を今日使われる形に完成させます．これによって，物理状態とは何か，観測を行うとどのような測定結果が得られるか，またどのように状態の時間的な変化が起きるか，といったことを予言する量子力学の数学的な形式が整ったということです．

その形式の要点は4つあります．すなわち，量子的な状態はヒルベルト空間のベクトルであり，観測量はエルミート演算子，その測定結果は状態との内積で表され，状態の時間発展はシュレディンガー方程式で規定されます．シュレディンガー方程式は線形な微分方程式ですから，その解を重ね合わせた状態も再び解になります．これに対して古典力学の方程式は一般に非線形ですから，その意味では量子力学は古典力学よりもシンプルで

あると言えます．それだけでなく数学的な枠組みとしては，総じて量子力学は非常にすっきりとした，美しい構造を持っていると言えるでしょう．その量子力学が，森羅万象の物理現象の最も基礎にあって，現実に応用されて非常に成功しているということは，大変不思議なことです．

ところで，先ほどお話した古典物理学では説明できなかった現象というのは，原子のスペクトルや，物体からの電磁波の放射の黒体輻射といった問題でした．ですから，20 世紀になって量子力学の枠組みができた際の応用先は，主として原子核，原子・分子の構造，またそれらを基礎とした物質の性質の理解といった問題に向けられたわけです．そして第二次大戦前から 1970 年代にかけて種々の素粒子が発見され，素粒子の研究を通した自然界の基礎法則の理解が大きく進みます．これらの研究のため，量子力学を基礎にして，粒子の生成消滅や相互作用を記述する場の量子論が発達し，またゲージ原理や対称性の破れといった概念も導入されて，物性物理などの研究にも広く使われるようになりました．

それが 1980 年代になると—ちょうど，私の大学院生時代に当たりますが—素粒子の発見が一段落し，その相互作用を記述するための理論もできあがって，量子力学はその最初の段階を終えた感じがするのです．

——量子力学が一つの段階を終えたということですが，その背景には何があったのでしょうか．

その背景の一つには，素粒子実験のためにはますます巨大な加速器が必要になり，提案された新しい理論の検証をしたり，未知の物理現象を探ることが少しずつ難しくなってきたことが挙げられます．それと同時に，1970 年代以降，ナノテクノロジーが急速に発達して，非常に小さなスケールの加工や操作が可能になったことも大きな要因です．量子力学の応用の対象が，原子や素粒子といった分野からナノデバイスなどへの世界へと広がったわけですが，ナノの世界はマクロの世界の延長が量子の世界に踏み込んだところにあって，いわば古典的な世界像が量子的な世界像と接触して火花を散らす領域に相当しています．そこでナノデバイスを使えば，量子の性質を用いて従来考えられなかった全く新しい応用が可能なのではないかという発想が成立するわけです．

実際，80 年代前後から，このような方面の実験的研究が格段に進みます．とりわけ量子光学の実験技術の発展は著しく，例えばレーザー冷却や蒸発冷却技術を基礎に，ボーズ＝アインシュタイン凝縮といった顕著な量子現象が実際に見られるようになったわけです．その一方で，ナノテク技術を糧にして量子力学の基礎的な研究も理論と実験の両面で進み，量子情報科学の幕が切って落とされます．このようにして，量子力学の主な需要先が素粒子や原子の世界から，量子光学や量子情報科学の世界に広がっていきました．

2. 新たな段階の量子力学

——新たな段階に入った量子力学は，前の段階に比べてどのような質的な違いがあるのでしょうか．

量子力学と古典力学には顕著な違いがいくつかあります．その一つは良く知られた不確定性原理ですが，これは古典力学では決定論的な存在だった物理量が，つきつめれば確率論的な意味での存在になってしまうことを意味します．

二つ目は物理量の量子化です．例えば，電子のスピンをある方向に観測すると必ず一定の値，すなわち $\hbar$ を単位として $+\frac{1}{2}$ か $-\frac{1}{2}$ かのどちらかになり，中間の値がありません．これは古典物理の世界にはない性質です．

三つ目は粒子と波動の二重性で，これは波としての干渉効果を性質として持ちながら，一方で粒子としての個別性も持つことです．これは光子や電子の 2 重スリットの干渉実験などで良く知られています．

最後の一つは，量子もつれと呼ばれる現象です．

これは量子力学特有の状態で，2つの系の間に常識的にはちょっと理解できないような相関関係が成立するというものです．

これらのうち，最初の三つは従来の段階の素粒子や原子核，物性の研究においても大きな役割を果たしましたが，最後の量子もつれの性質については，もちろん粒子の対称性などの意味では内部に組み込まれてはいたのですが，意識的にそれ自身が研究の俎上に乗っていたということはありませんでした．その状況が，前に述べたような技術発展によって劇的に変化し，とりわけ90年代になると量子情報科学の発展によって量子もつれが根幹的な性質として認識され，研究の対象になるようになったわけです．このような変化によって，量子力学が新たな段階に入ったということです．

——そうすると，量子力学についての認識も以前とはかなり違ってきたということでしょうか．

その通りです．その良い例として観測問題や，物理量の実在性，量子状態の非局所性といった量子力学の最も基礎に関する問題にも，近年脚光が当たりつつあることを挙げることができるでしょう．良く知られているように，アインシュタインは光量子説などを通して自身が量子力学の建設に助力したにも拘らず，作られた量子力学の理論的完全性には一生疑問を持ち続けました．彼がその深刻な疑問を表明したアインシュタイン–ポドルスキー–ローゼン論文（EPR論文）は，1935年という量子力学が完成して間もない段階に提出されています．そしてこれに触発されたシュレディンガーが，同じ年に「シュレディンガーの猫のパラドックス」の論文を書いて，問題の根幹に量子もつれという性質があることをより一層明確にします．

しかし彼らの疑問は，量子力学の育ての親であり最高権威者であったボーアによって一蹴され，その結果，教育的ドグマとしてこのような「非生産的な」問題に立ち入ってはならないという観念が，大部分の物理学者をその後，長い間支配しました．この状況は，約30年後にベルが有名なベル不等式の論文を書いて，アインシュタインの疑問を実験的に検証する道を拓いた後も暫く続きます．

ところがこの状況が前に言ったような事情で80年代以降大きく変化し，量子情報科学の観点からも，量子力学の基礎問題に興味が集まるようになったのです．その証拠に，例えばEPR論文の引用件数を調べてみると，論文の書かれた1935年からベルの論文が出る1964年までの30年間の引用件数が約200件なのですが，その後飛躍的に増えて1965年以降現在まで4000件以上の引用数が数えられます．光電効果や相対論を含めたアインシュタインの書いた他のどの論文よりも引用件数が多く，現在の物理のすべての分野で最も引用される論文の一つになっているのです．

ちなみに私が学生の頃は，まだボーアの教育的ドグマが色濃く残っており，量子力学の基礎に関する議論を敬遠する風潮がありました．観測問題なぞに関わることは，研究者としての将来を潰すことだという，一種のタブーがあったわけです．ところが，最近では研究会でそれに類するような議論が出ても，これを異端だとするような空気は感じられなくなりました．時代が変わったということだと思います．

——量子力学の応用例はいくつかあると思いますが，先生が今後の応用として一番興味を持っていることは何でしょうか．

具体的に挙げろと言われると困ってしまいますが，これから是非実現してほしいと願っているものの一つに，1990年代初めにエリツァーとヴェイドマンによって提案された「量子爆弾検査」という不思議な思考実験で使われる量子技術があります．この思考実験については，詳しくは以前書いたもの（本誌2002年11月号特集「エキゾチックな量子の世界」，量子力学の非常識な魅力，別冊・数理科学「量子の新世紀」(2006) に再録）をご覧頂ければと思いますが，粒子と波動の二重性など量子力学の際立った特徴を巧妙に使って，一見，測定対象に全く影響を与えないでその性質を知ると

いう，古典的な常識では不可能な驚異的なものです．最近，このアイデアを改良する実証実験も進んでいるようなので，将来何か思いがけないところへ応用されるかも知れません．

いずれにせよ，これからの量子力学研究は，その基礎の研究とともに，量子もつれや粒子と波動の二重性などといった量子力学の顕著な性質を，直接制御し活用するという方向に進むだろうと思います．量子もつれを基礎に置くものが量子計算や量子暗号だとすれば，その他の性質を基礎に置く新しい量子力学の応用研究は，これから芽が出てくるのではないかと考えています．もしそうならば，古典物理学に基く従来の常識では全く考えられないような応用例が，21 世紀の後半くらいには登場するのではないかというのが，私の個人的な予想というか希望なのです．

3. これから量子力学を知ろうとする方々へ

――新段階に入った量子力学を勉強するにあたり，知っておいたほうがいいようなことがありましたら，お教え下さい．

そうですね．量子力学については，理工系の大学に入学した学生はまず初歩的な講義を受け，さらに物理系の専門学科へ進むと，先ほどお話したような数学的枠組みやシュレディンガー方程式を解く方法を習うというのが，従来からのスタンダードなコースだと思いますが，今でも大部分の学生はそのような課程で勉強しているでしょう．

しかしこの伝統的な課程には，例えば量子もつれや，量子測定とは何かといった基礎的で重要な概念が抜け落ちています．また，EPR 論文の意義やベル不等式とその検証は，量子力学の根幹に関わる大変重要な話題ですが，これに触れることも少ないようです．これらは，和書では例えば清水明さんの教科書（『新版 量子論の基礎』サイエンス社，2004 年）にわかりやすく書かれていますので，そちらを参照されると良いと思います．

これからの量子力学の基礎と応用の研究には，先ほどお話したように古典物理とは相容れない量子力学特有の性質を，一層深く理解することが重要になります．端的に言えば，例えば「量子もつれ」とは一体何かということを，より直感的に，かつ精確に理解することが必要になるように思います．その見地からさらに言えば，EPR の議論やベル不等式の他，コッヘン–スペッカーの定理として知られている量子力学における観測結果の状況依存性も，重要な概念として是非知っておくと良いでしょう．これは，量子力学の枠組みの中では，測定の状況に依存しないように物理量に実在性を与えることはできないという定理ですが，逆に言えば，物理量を測定したときには，他にどのような物理量と同時に測定するかによって，一般にその測定結果が変わってしまうということを意味します．物理量を同時測定する場所が互いにどれほど遠くに離れていても，この状況依存性から逃れることができないということは，前に述べたベル不等式のこととも関係しますが，量子力学における非局所性という性質や，物理量や物理状態の実在性とは何かなど，哲学的にも大変面白い問題を提起しています．

ところで余談ですが，コッヘンは 2006 年になってこの定理をさらに発展させた「自由意志定理」なるものを発表し，量子力学の基礎にさらに一石を投じています．彼はプリンストンの数学者ですが，長年にわたり量子力学の基礎を研究し，意外にも哲学的な香りのする仕事をしているところが面白いですね．

このような量子力学の基礎に関する概念を，まとまって易しく解説した教科書で入手しやすいものはなかなかないのが残念ですが，アメリカの物理学会誌である *Physics Today* や *Nature* 等の欧米の科学雑誌などには，時々非常に参考になる解説記事が掲載されますので，これらを探して勉強するのも一つの方法だと思います．これらの話題は既存の標準的な教科書には書かれていないこと

が多いので，こういったところから意識的に情報を集めるようにすることが大事です．

――お話を伺っていると，物理以外の方で量子力学を知りたいという人が今後ももっと増えるのではないかとも思うのですが ...

そうですね．先ほどお話したコッヘンのように量子力学の基礎の分野では，欧米では数学者や哲学者が物理学者に伍して第一線にいる場合もしばしば見受けられます．較べて日本ではまだそれほど多くありませんが，数学者の小澤正直さんのように，近年，不確定性関係の概念の精密化に関して立派な仕事をされている方もいます．日本でもそのような専門の垣根を越えた研究者がこれから多く出て，様々な専門の立場から実のある議論ができるようになればと思います．また物理の研究者の中からも，狭い専門から出てもう一度量子力学の基礎を勉強し，議論に積極的に参加する人が出ることが望まれます．

というのも，本当に量子力学の基礎的な問題を考えていくと，これは基本的に哲学の問題なのではないかという気がしてくることが時々あるんですね．ギリシャ以来，科学の立脚するところは実在論ですから，量子力学が素朴な実在論を否定するとすれば，非実在性とどう対峙しなければならないかという問題に突き当たります．また先ほどの「自由意志定理」の内容を吟味すると，自由意志とは何かについて，物理や哲学を綜合した立場から何らかの回答を考えざるを得なくなるかも知れません．

ですから，これからは物理はもちろん，数学や哲学など幅広い興味を持つ人たちが，量子力学の研究に遠慮なく参入することが是非とも必要で，それによって，21世紀の量子力学の基礎と応用発展が，一層確かなものになるものと考えています．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

量子力学の基礎に関する主な発展．
（本インタビューとの関係事項を中心に）

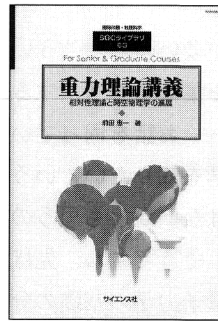
年代	人名	事項
1900	プランク	熱放射の量子仮設
1905	アインシュタイン	光量子説
1913	ボーア	原子模型のスペクトル
1922	シュテルン，ゲルラッハ	スピンの量子化検証
1925	ハイゼンベルク	行列力学
1926	シュレディンガー	波動方程式
1928	ディラック	相対論的波動方程式
1935	アインシュタインら	EPR パラドックス
1935	シュレディンガー	猫のパラドックス
1952	ボーム	隠れた変数の理論
1959	アハロノフ，ボーム	ゲージ場と量子干渉（AB 効果）
1964	ベル	局所実在論における相関（ベル不等式）
1967	コッヘン，スペッカー	物理量の状況依存性
1982	ベネット，ブラサール	量子暗号鍵配布
1984	アスペら	ベル不等式の破れの実験的検証
1989	グリーンバーガーら	非統計的な局所実在論検証提案（GHZ 状態）
1989	外村ら	AB 効果の実験的検証
1991	エカート	量子もつれによる暗号鍵
1992	ドイチュ，ジョサ	量子計算アルゴリズム
1993	エリツァー，ヴェイドマン	爆弾検査の思考実験
1993	ベネットら	量子テレポーテーションの提案
1994	ショア	量子計算による素因数分解アルゴリズム
1995	コーネルら	ボース＝アインシュタイン凝縮
1996	グローバー	量子検索アルゴリズム
2003	レゲット	非局所実在論の不等式
2003	小澤	不確定性関係の一般化
2006	コッヘン，コンウェイ	自由意志定理
2007	ゲルリッヒら ツァイリンガーら	アゾベンゼン分子の干渉 レゲット不等式の破れの実験的検証

（2008年7月，
高エネルギー加速器研究機構研究室にて）

（つつい・いずみ，
高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所）

重力理論講義

相対性理論と時空物理学の進展



前田恵一著，B5 判，192 頁，本体 1886 円，サイエンス社

自然界には 4 種類の力があるとされ，重力はその一つである．重力は電磁力と並び最もよく知られた力だが，最も未解明の力でもある．それは，重力が他の力とは異なり，時間と空間（以下，略して時空）の幾何学そのものから決まる，という性質に由来する．アインシュタインはこの特殊性を見抜き，一般相対論を導出した．一般相対論は様々な現象を，定量的に説明することに成功してきた．古くは，水星の近日点移動率や太陽重力による光の屈折角度を正確に導き，その後も太陽重力の影響による光の到着時間の遅れ（シャピロの時間の遅れ），重力波の存在と放射量などを予言し，これらは観測により定量的に証明されてきた．我々が観測できる現象に関しては，ほぼ完全に説明できる理論である．1960 年代以降，クェーサー（超巨大ブラックホール），パルサー（中性子星），X 線星（ブラックホール），連星中性子星などの発見が続き，一般相対論的天体が宇宙に多数存在することが明らかになってからは，一般相対論は宇宙物理学者の必須の知識となった．複雑な基礎方程式であるアインシュタイン方程式を解析し，新たな現象の発見を探る試みは現在も続けられているし，また近い将来重力波検出が実現すれば，新たな発見があると期待されている．

しかし，一般相対論といえども完全ではない．例えば，宇宙は膨張しておりそれはビッグバンによって始まったとされるが，一般相対論によると誕生時の宇宙は特異点である．特異点では物理法則が破綻するので，ビッグバンがどのように始まったかについて一般相対論では予言できない．宇宙のごく初期では空間の曲率半径が微小なため，量子論的な効果が重要な働きをすると予想され，量子重力理論を構築しなければその様相を理解できないと考えられている．一般相対論は古典理論なので，この問題に対しては無力である．

力の統一という観点からも課題が残る．冒頭で述べたように力には 4 種類あるが，これは現在我々が観察すると 4 つに見えるというだけであって，本質的にすべての力は十分に高いエネルギーでは区別がつかないものと考えられている．事実，重力以外の 3 つの力の統一を支持する実験結果があり，また完成度の高い理論も存在する．重力もさらに高いエネルギーでは統一されると予想されているが，重力が時空の幾何学的状態から決まるという性質上，統一理論の構築は他の 3 つの力と同様にはいかない．超弦理論のようにすべての力を幾何学的に記述しようという試みが必要になる．ただし，完成度の高い理論を作るには時空の次元を 4 より大きく取ることが必要とされ，有望とされる理論ではそれが 10 や 11 になる．その場合，首尾一貫した理論構築には高度な数学が必要になるし，またなぜ我々は 4 次元しか認識できないのか，という疑問も生じる．難問ゆえ超弦理論は今のところ完成に至っていない．

以上をまとめると，観測できるものに関しては一般相対論でほぼ十分なのだが，宇宙の始まり，ブラックホールの中心，時空の次元，宇宙項（ダークエネルギー）の起源といった問題に対して答えを与える重力理論は現存しない，となる．本書では，ここで述べたような重力理論発展の歴史，および未解決問題とその解決のための試みが紹介されている．幅広い話題が網羅されたこれまでにない入門書である．難解そうな内容に関しても平易に説明されており，重力理論を学びたいと考えている学生，また一度勉強したいという分野外の研究者にも適した著書である．20 ある章がほぼ独立になっているので，興味のある部分だけを選んで読むことも可能である．代表的な文献が各章末に掲載されているので，興味を引いた内容をさらに勉強するのにも便利である．

著者は 2010 年に還暦を迎えるが，未だに第一線で頑張る，日本を代表する重力理論研究者である．このような研究者が過去 40 年にわたって習得してきた知識の一部が，この入門書には記述されている．読者は，40 年分の努力を省いて知識の取得ができるのだから，大変おいしい一冊だと言えるだろう．

柴田　大（東京大学大学院総合文化研究科）

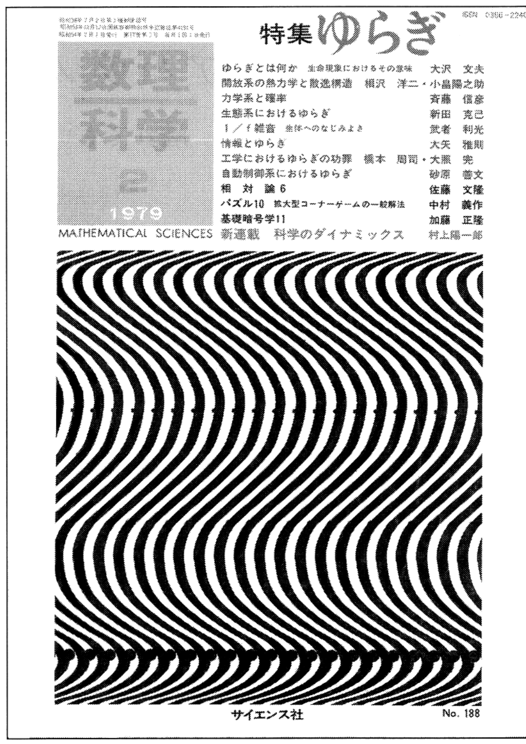
「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

斎藤 信彦

1979年2月号

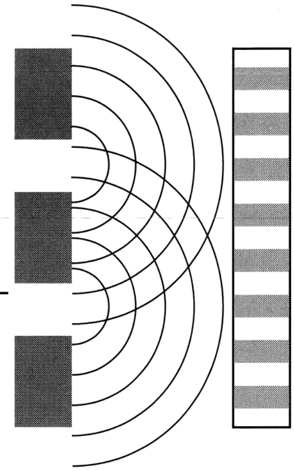
統計力学は力学に基づいていますから，力学にはなんらかの意味で，乱雑性が発生し，確率が存在するはずだという考えをもっていました．そこで非線形格子振動をモデルにして，ある初期条件のもとでその挙動を時間的に追って，線形の場合と比較してみようとしました．ちょうど東大の大型計算機が動きだしたころで，広岡一さんとやったのですが，線形の場合とあまりかわらないのです．当惑していましたら Fermi, Pasta, Ulam が同じ目的で，ほとんど同じことをやっていて，周期的な解を得ていることを知りました．Fermi らの初期条件のほうが，単純でしたのでそれに乗り換え，調べてみますと，高いエネルギーのときに周期的でない乱雑な解が得られることを見つけました．カオスという言葉が使われる前でしたが，カオスの一つの発見でした．しかしそのころ驚いたことは Hénon–Heiles がもっと簡単な自由度 2 の系でカオスを見つけ，更に散逸系では 1 自由度系でさえカオスが見つかったことでした．1979 年の解説ではそういう簡単な系でもカオスがあることを示したいと思ったのです．しかし元々統計力学のエルゴード性のためにカオスを見たいという素志がありましたので，散逸系の研究は流行していましたが，その後はハミルトン系をとくに調べておりました．力学と熱力学という 2 つの体系が可逆性と不可逆性という違った面をもちながら共存しているのは，カオスが存在するためであり，その観測には，平均操作が必要であると考えました．エルゴード理論は殆ど数学者の手に渡ってしまったという感がありましたが，これで物理学に戻すことができると思いました．



古典的な系の次には当然量子系にも関心が移りますが，量子力学にはカオスがないというのが定説です．しかしカオスらしいものがあるに違いありません．波動関数の位相は古典力学で近似されます．量子化によって，そのカオスが隠されているのです．前に述べましたようにカオスの観測には平均操作が必要だとすると，位相の相関が消え波動関数の decoherence が生じます．これは量子力学の観測問題の重要な観点です．並木美喜雄さんから観測問題についていろいろ教えていただきました．所謂量子力学のミステリーは量子カオスによって解けたと今は考えています．最近の *Nature* (**454**, July 3, 2008) には，シュレーディンガーの猫は箱をあける前は生と死の 2 状態の重ね合わせですから，そのときは，猫を生きたまま救出できるかという議論がありました．実験で成功したといいますが，猫の代わりにカオスのない超伝導体の qubit を使っているのです．量子コンピュータには応用できますが，私の立場では，カオスのある猫では当然不可能です．

（さいとう・のぶひこ，早稲田大学名誉教授）

目で見て学ぶ量子力学



第8回 実験でひもとく量子の不思議

アハラノフ・ボーム効果

触れてもいない磁場を感じる電子

外村　彰

8.1 はじめに

前回，電子が二重スリットのどちらを通過したのかを検出すると，干渉縞が消えてしまうことを紹介した．W.H. ファリーと N.F. ラムゼー[1)]や Y. アハラノフと D. ローリッピ[2)]は，全く電子に力が働かないという条件下に電子がどちらのスリットを通ったかを観測できたとしても，やはり干渉縞が消えてしまうことを指摘した．理由は，アハラノフ・ボーム（AB）効果にあった．そこで今回は，AB 効果をきちんと考えてみる．

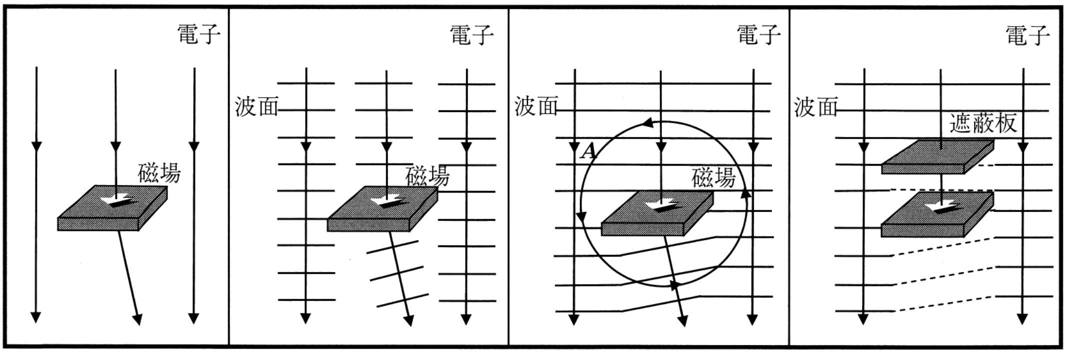
8.2 ベクトル・ポテンシャル

電子が磁場を透過すると，波動関数はどのように変化するのか？ シュレディンガー方程式を解けば良い訳だが，均一な磁場の場合以外は，そう簡単ではない．

そこで電子の振舞いを古典論からスタートして考えてみよう．まず簡単な場合（図 8.1）から始めよう．無限に長くて，磁場が外に漏れていない薄膜棒磁石に電子を当てる．磁石の中を通った電子はローレンツ力**傍注1**を受けて軌道が右に傾く（図 8.1 (a)）．しかし磁石の両側には磁場はないので，外側を通る電子は，そのまま真っすぐに進む．ここで，電子の波面を電子の進行方向に垂直な面として描いてみる．入射電子は平面波になる．磁石を通過した波面は，右上がりの平面波になる（図 8.1 (b)）．図をよく見ると，不思議である．磁石を通った波面と，磁石の外側を通った波面を連続的につなげることができない．波動関数は観測することはできないので，波面が連続でなくても構わないと思うかもしれないが，そうはいかない．平面波を重ねれば，干渉縞の形で波面の形を観測することができるので，波面つまり位相が不連続になるのは不自然である．

［傍注1］ 磁場（磁束密度）$\boldsymbol{B}$ の中を，$-e$ の電荷をもつ電子が速度 $\boldsymbol{v}$ で走ると，$-e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ の力を受ける．これをローレンツ力と呼ぶ．

電子軌道を描いて，軌道に垂直な波面を描くやり方に誤りがあるのだろうか？



(a)　電子の軌道　(b)　電子の波面　(c)　波面とベクトル・ポテンシャル　(d)　AB 効果

図 8.1　磁石にあたる電子.

この問題を解決するには，AB 効果に登場してもらわなければならない．AB 効果によれば，2 本の電子軌道の波面のずれ（位相差）は，2 つの軌道の間を通る磁束に比例する．驚くべきことに，電場も磁場もないはずの空間を通る電子の波は，磁石の左右で波面がずれ，波長が異なってしまう（図 8.1 (c)）．これらの電子は，電場や磁場の無いところを通っているにも関わらず，電子は磁場の影響を受けてしまうのである．何故こんなことが起こるのだろうか？ ベクトル・ポテンシャルのなせる業である．

電場や磁場は，目で見たり触れたりすることはできない．このため電場や磁場は電子などの荷電粒子に働く力として定義された．電場や磁場は電荷を持った粒子にしか見ることはできない．それなら，電子を波として考える量子力学では，電磁場はどう見えるのか？ 基本方程式であるシュレディンガー方程式に現れるのは，力ではなくポテンシャルである．磁場 $\boldsymbol{B}$ の代わりにベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が導入される．この $\boldsymbol{A}$ は磁石の外にも存在し，電子の波の位相をずらすことになる．$\boldsymbol{A}$ は，図 8.1 (c) のように磁石の周りを周回する渦状の流れになる．$\boldsymbol{A}$ には，ゲージ変換の自由度があるが，どんなゲージをとっても回転成分は残る[傍注2]．

［傍注 2］　無限に長い棒磁石の外部には磁場 $\boldsymbol{B}$ はない．しかし $\boldsymbol{A}$ は存在する．磁石の周りを $\boldsymbol{A}$ の周回積分 $\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ を行うと，磁場の面積分 $\int \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，つまり磁石の磁束になる．このため磁石の外部で $\boldsymbol{A}=0$ にする訳にはいかない．かと言って $\boldsymbol{A}$ は一義的に決まる訳ではない．$\boldsymbol{A}$ の定義は $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ であるので，$\boldsymbol{A}$ の代わりに $\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,\chi$ としても $\boldsymbol{B}$ は同じになる．この変換をゲージ変換と言う．

磁石の左右を通る電子の波面のずれは，平面波を重ねて干渉させれば，観測可能である．この結果は，古典的には理解できない．電場も磁場もない真空中を走る電子が，磁石の左右で，いつの間にか物理的状態が変化してしまう．ひょっとすると，「波面は連続的でなければならない」という要請から，波面がずれてしまったのかもしれないので，電子が磁場に当らないように遮蔽してしまったらどうなるだろうか？ これが図 8.1 (d) である．こうすれば磁石を通過して傾いた波面の部分はなくなってしまうので，波面は途切れてしまい，その要請はなくなる．

しかし，入射電子が磁場に当たらないようにしたからといって $\boldsymbol{A}$ が磁石の外部で消えてしまう訳ではないので，左右での波面のずれは存在する（図 8.1 (d)）．ただし，図 8.1 (d) の遮蔽板の後方では波動関数の振幅がゼロになってしまうので，そこでの波面は定義できなくなる．

8.3 AB 効果の誕生

「電子は，電場や磁場に触れていなくても，物理的な影響を受ける」．これがAB 効果である．1959 年，イギリス，ブリストル大学のアハラノフとD. ボームが考え出したので[3)]，イニシャルを取って“AB 効果”と呼ばれている[傍注3]．

［傍注3］ 1949 年にW. エーレンベルグとR.E. サイデイは，電子の屈折率を議論する論文の中で，磁場に対するAB 効果を見つけている．このためESAB 効果と呼ぶ人もいる．

AB 効果が発表されるや，世の注目を浴びるが，ほとんどの物理学者は「そんな現象は，起こるはずがない」という否定的な反応を示した．どんな偉い物理学者でも「電場も磁場もないところを通る電子が，物理的な影響を受ける」などということは夢にも思わなかったようである．その反応は，人によって様々なので面白い．

アハラノフの博士論文の審査を受け持った一人がR.E. パイエルスであった．パイエルスは，初めはAB 効果の存在を信じなかったが，論文を読んで一旦は納得した．ところが後年アハラノフに会ったとき，「やはりおかしい」と言ったと言う．

AB 効果を認めたのはR.P. ファインマン，P.A.M. ディラックそしてE.P. ウィグナーだったと言う．特にファインマンはAB 効果を直ちに認めた数少ない例外であった．論文が発表されるや，アハラノフとボームに電報を送った．「おめでとう．だが，自分の手でこの現象を見つけたかった！」．

ファインマンは，1964 年にこう述べている[4)]．

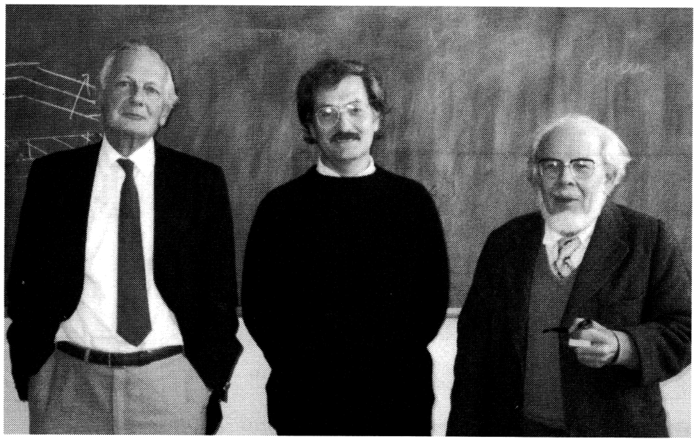
> 「古典物理学で，唯一重要なのは$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$である．ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$やスカラーポテンシャルVは数学的な作り物で，その渦（curl）だけが意味をもつ．しかし，シュレディンガー方程式は，$\boldsymbol{A}$とVできれいに書き表され，さらにAB 効果で示されたように$\boldsymbol{A}$は実在である．古典的には，全く影響のないような量子力学的干渉実験でも影響が生じる．それは遠隔作用なのか？ いや，$\boldsymbol{A}$は，$\boldsymbol{B}$と同様に実在である」．

1960 年に出版されたファインマンの物理の教科書ではいち早くAB 効果が取り上げられている．N. ボーアは，当初「AB 効果はない」と言った．理由が，いかにもボーアらしい．「電子には力が働いていないので，対応原理が成り立たない」．

［傍注4］ 小林理研にいた加藤範夫先生（1923–2002）は，1960 年1 月からブリストル大学のA.R. ラング研究室に10 カ月滞在していた．大学院生だったアハラノフは加藤先生のところに来ては，周囲に信用してもらえないAB 効果の話をしていたと言う．同じブリストル大学のM. プライスは「AB 効果は何か間違っている」と言っていたと言う．F.C. フランクは，ひょっとするかもしれない，ということで，当時低温物理をやっていたR.G. チェンバースに鉄のホイスカーを使った実験を薦めたと言う．

チュービンゲン大学のG. メレンシュテット，ベルリン大学のH. ベルシュ，そしてアメリカ国立標準局のL.L. マートンなど，理論が出るや，当時の電子顕微鏡の権威者たちがこぞって，AB 効果の検証実験に取り組んだ．ところが，一番のりは電子線の非専門家だったブリストル大学のR.G. チェンバースであった．この実験をチェンバースに薦めたのは，結晶に力を加えたときに結晶欠陥（転位）の増殖によって変形が起こるという機構（フランク・リード源）を考え出したF.C. フランクで，「ホイスカーを使ったら良い」という提案をしたと言う（図 8.2）．この事情は当時ブリストル大学に留学していた加藤範夫先生[傍注4]やアハラノフから聞いた．

チェンバースは，先の尖った鉄のホイスカーを使って実験を行った．磁場は



R.G. チェンバース　　J. スティーズ　　F.C. フランク

図 8.2　F.C. フランクと R.G. チェンバース．1985 年に AB 効果発見の地であるブリストル大学に招かれたとき，私の講演に集まった教授たちの写真．

外部に漏れてはいたものの，AB 効果が予測する位相差が検出された．続いて，H. ベルシュ，L. マートン，そして，見事としか言いようのないメレンシュテットの結果も報告され，5 年も経つうちに AB 効果は不動の地位を確保したかのように見えた．

筆者は，メレンシュテットの実験[5)]に感動して 29 歳のときに，チュービンゲン大学に留学した．そんなこともあるので，ここで，彼の美事な実験を紹介しておきたい．

8.4 メレンシュテットの実験

メレンシュテットは，太さ 10 μm 以下という小さなコイル（図 8.3）を作るために，そのための旋盤をわざわざ作った．彼の実験の見事さはそれだけではない．コイルに流す電流を変化させたときに，位相がどのように変化するのかを 1 枚の写真に写る工夫をした（図 8.4）．干渉縞の方向と垂直にスリットを設け，コイル電流を変化しながらフィルムを巻き取るようにしたのである．こうすれば，磁束による干渉縞の変化を 1 枚の写真で読み取ることができる．

図 8.5 の写真には，AB 効果のすべてが写し出されている．写真中では，スリットは水平方向に置いてある．コイルの電流を次第に増加させると，2 本の電子線の位相差は大きくなり，干渉縞は，横にずれていく．写真中スリットの位置は，上方に移動するので，干渉縞が傾斜することになる．電流の増加を止めても，干渉縞はそのままの位置に止まり，もとの状態には戻らない．

AB 効果は，物理学に重要な問題を投げかけた．「電場や磁場がないところでも，電子が影響を受ける」ということになれば，「一体 “電磁気” とは何なんだろう？」という疑問が生じる．電磁気そのものを，もう一度考え直す必要が出てくる．

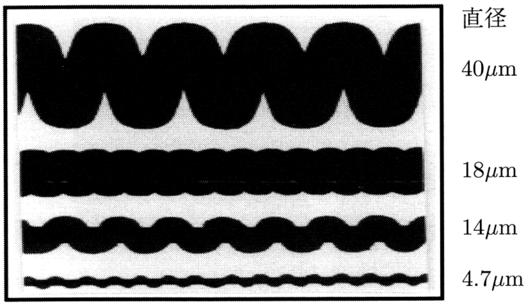


図 8.3　G. メレンシュテットが作った小さなコイル.

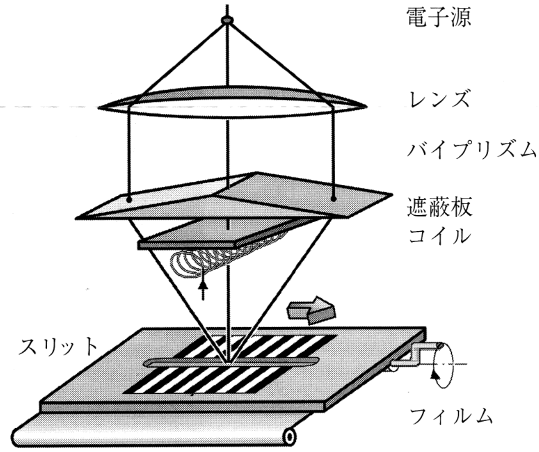


図 8.4　G. メレンシュテットによる AB 効果の実験.

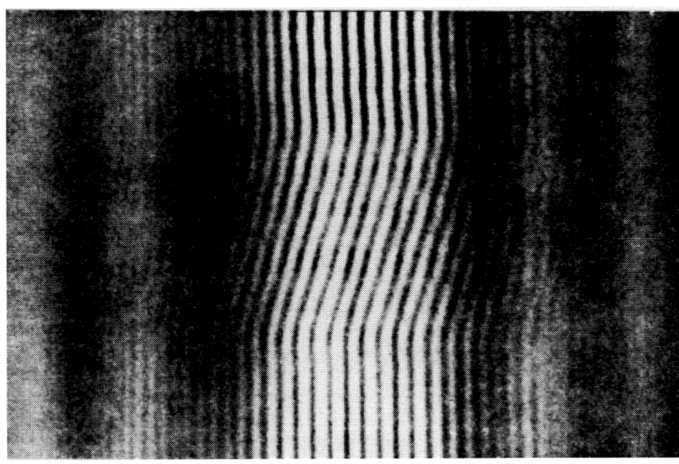


図 8.5　G. メレンシュテットによる AB 効果の検証写真.

「電磁場以外の一体何が，電子の波動関数を変化させたのだろうか？」――コイルの外には，電場も磁場も存在しない．あるとしたら，そこには $\boldsymbol{A}$ しかない．

かくして，電子の波の位相を変化させたのは，$\boldsymbol{A}$ であると考えざるを得ない．電磁気は，古典的には電場や磁場で表せた．しかし，AB 効果は「量子力学の世界ではポテンシャルによって表現されるべきである」ことを物語っている．

$\boldsymbol{A}$ は，かつて J.C. マックスウェルが M. ファラデーの磁力線を数学的に表現するために用いた．そして，近年になって “ゲージ場” と名を変え，力の統一理論の最も基本的な物理量となる．だが，その間，100 年もの長きにわたって，幾たびとなく議論を呼び，様々な運命をたどってきた．

そこで $\boldsymbol{A}$ の歴史をたどりながら，電磁気とは何なのかを考えてみたい．

8.5 電磁気とは何だろう？

AB 効果は，「電磁気とは何だろう？」という基本問題を考えさせてくれるま

たとない材料である．

かつて，電気現象と磁気現象は，全く別の現象だった．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ との間に関連があることを最初に見出したのは，H.C. エルステッドである．彼は，E. カントの熱烈な崇拝者で，異なった種類の力であっても互いに変換し得るというカントの教えを信じ，電場と磁場の関係を長年にわたって調べ，電流の周りに磁場が取り巻いていることを見出した．

後にファラデーは，磁石をコイルに出し入れしたときに，電場が発生しコイルに電流が流れることを見出す．ファラデーは，磁石と電流が関係する理由を考えた．そして，磁場の作用下にあるコイルは，何らかの特別な緊張した状態（Electrotonic State）になっていると考えた．この状態が変化しなければ，何も起こらない．しかし，磁石を動かして，Electrotonic State を変化させると，電流が流れると考えた．

その実体が何なのか分からなかったが，その後も Electrotonic State のことがずっと気がかりで，くり返し考え直している．「重力も電気に変換できるのではないか？」と考えて，ボーリング玉のようなものを落下させて電気が起きないかどうかを調べる実験もやっているが，このときにも Electrotonic State を引き合いに出している．だが，結局それ以上の進展はなかった．

これを引き継いだのがマックスウェルである．彼は，1856 年，$\boldsymbol{A}$ こそが Electrotonic State であると考え，$\boldsymbol{A}$ の理論を作る．マックスウェル 25 才のときである．

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{8.2}$$

この 2 つの式は，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が，$\boldsymbol{A}$ を通して互いに関連していることを示している．すなわち，$\boldsymbol{A}$ の空間分布に Rotation，つまり渦があると $\boldsymbol{B}$ が生じ，$\boldsymbol{A}$ が時間的に変化すると $\boldsymbol{E}$ が生じるという訳である．この式が後にマックスウェル方程式へと発展する．

マックスウェルは，$\boldsymbol{A}$ を物理量と考えた．(8.2) 式によれば，$\boldsymbol{A}$ の時間変化は，単位電荷に働く力である．これは，「運動量の時間変化が力である」ことを示すニュートンの運動方程式を思い出させる．$\boldsymbol{A}$ は運動量と同じ役割を果たしている．実際，マックスウェルは，$\boldsymbol{A}$ を "電磁気的運動量" と呼んでいる．

「我々が見ることすらできない電磁場が，粒子のように運動量を持っている」と言われても，すぐには納得し難い人もいるかもしれない．場の運動量は，粒子の運動量とは意味合いが異なり，正しくは，「単位電荷をもつ粒子をある位置に持ってきたときに，その粒子に $\boldsymbol{A}$ の運動量が付与される」という意味である．"ポテンシャル運動量" と言ってもよい．だから電荷をもっていない粒子を持ちこんでも運動量が変化するわけではない．

そもそも $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ は，単位電荷の粒子に働く "力" として定義され，電磁気は "力の場" であった．だが，荷電粒子のエネルギーや運動量に変化をもたらすものが電磁気であるという考え方をすると，電磁気をポテンシャル V と $\boldsymbol{A}$



C.N. ヤン
(1922–　)

S.S. チャーンズ
(1911–2004)

図 8.6　C.N. ヤンと S.S. チャーンズ．中国の物理学と数学の両雄を著名な画家 Fan Zeng（范曽）が描いた絵．2005 年，第 8 回 ISQM に参加されたヤン先生からこの絵をいただいた．以来，私のオフィスの壁に大切に飾ってある．

で表現するほうが直接的である．さらに量子力学になると，V と $\boldsymbol{A}$ は波動関数の位相を変える量として，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ よりも重要な役割を果たすことになる．

AB 効果は，ゲージ理論**傍注 5** の登場によってさらに重要性が増すことになる[6)]．電磁気を手掛かりとして作られたゲージ理論では，力を媒介するのは $\boldsymbol{A}$ で，これこそが基本的物理量と見なされる．ただし，ここで言う $\boldsymbol{A}$ は，静電ポテンシャルをも含めた 4 次元空間に拡張された 4 元ベクトル $\{A_\mu\}$ である．電磁気は $\{A_\mu\}$ で完全に表され，(8.1) と (8.2) 式を拡張したマックスウェル方程式は，さらに簡潔で見事な式で書き表される．統一理論では，この $\{A_\mu\}$ は，拡張されてゲージ場になる．

ゲージ理論が力の統一理論の本命と目され始めた 1975 年，C.N. ヤンは T.T. ウーと共にゲージ理論で磁気単極子 “モノポール” を論じる有名な論文を発表した[7)]．

この中で，ヤン（図 8.6）は電磁気をこう定義している．「電磁気とは，位相因子のゲージ不変な現れである」――“Electromagnetism is the gauge-invariant manifestation of a nonintegrable phase factor.”

変幻極まりない様々な様相を示す電磁気現象を一言に凝縮している．Phase factor，位相因子とは，$\{A_\mu\}$ を線積分して，位相因子の形 $\exp\left(i\oint A_\mu \mathrm{d}x_\mu\right)$ にしたものである**傍注 6**．

ヤンの言葉をもう少しやさしく言うと「どんなゲージ変換を行ってみても，常に位相因子が変わらないようになっているのが電磁気である」となる．この一言の中にすべての電磁気の法則は含まれてしまう．そして，この言葉をそのまま具現化した現象が AB 効果になる．こうして，AB 効果は，電磁気がゲージ理論に従っていることを直接に示す唯一の現象として取り上げられることになり，すっかり株が上がってしまった．

[傍注 5]　波動関数の位相を一定の値だけ増減しても，変化はない．観測されるのは位相差だからである．ここで，位相を時空の各点で勝手に増減させてもシュレディンガー方程式が変わらないようにする．これには，電磁場の導入 $(\boldsymbol{A}, V)$ が必要になる．ゲージ不変という要請によって，力の場が生まれることになる．これがゲージ理論の考え方である．

[傍注 6] $A_\mu \mathrm{d}x_\mu$ は $A_1\mathrm{d}x_1 + A_2\mathrm{d}x_2 + A_3\mathrm{d}x_3 + A_4\mathrm{d}x_4$ のことを表す．

8.6 AB 効果論争

“ゲージ場の理論” との関わりで重要性を増したAB効果は，急に注目を浴びるようになる．だが，$\boldsymbol{A}$ は，O. ヘビサイド以来，長い間，単なる数学的な量と考えられてきた．事実，私が大学で電磁気を習ったときには，そう教わってきた．このため，AB 効果の実在性を根強く否定する人がいて，長い間，議論が続いてきた[8,9]．

1978 年，イタリアの P. ボッキエリと A. ロインガーが AB 効果の存在そのものを否定するに至って，議論はさらに沸騰する．まず理論的に AB 効果は存在し得ない，いろいろな理由を挙げている．

$\boldsymbol{A}$ は，一通りではなく，様々な自由度がある．コイルの外部で $\boldsymbol{A}$ がゼロになってしまうようなゲージを持ち出して，AB 効果を否定している[8,9]．また，シュレディンガー方程式は $\boldsymbol{A}$ を使って書き表されているので，$\boldsymbol{A}$ が物理量であると思いがちだが，そうではない．シュレディンガー方程式を，電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ だけを使った 3 組の連立方程式に書き変えることができる[8,9]．したがって，$\boldsymbol{A}$ は単なる数学的な量にすぎない．

これまでの実験に対しても，「肝心なポイントを押えていないので，AB 効果の実験にはなっていない」と主張した．確かに，これまでの実験では，有限の長さの鉄のホイスカーやコイルが使われていた．両端の N 極と S 極からは，磁場が外に漏れていた．しかも，どの程度の磁場が漏れて，電子にどの程度の影響を与えているかを定量的に測定する手法はなかった．それまでの実験で検出された位相差は，磁極から漏れ出た磁場の効果によって生じたもので，$\boldsymbol{A}$ によって生じたものではないと言う．

1981 年の *Physical Review Letters* に，AB 効果に関する論文が 3 報並んで掲載された．すべて AB 効果は存在するという主張だが，AB 効果を否定する側は，ひるむ様子はない．議論はエスカレートして，止まるところを知らないように思えた．論文の数も 200 以上にものぼった．私は，この論争に決着をつけるには，確乎たる実験結果を得る以外に道はないと確信し，すべての人を納得させられる実験を計画した．

参考文献

1) W.H. Furry and N.F. Ramsey: *Phys. Rev. Lett.* **118** (1960) 623–626.
2) Y. Aharonov and D. Rohrlich: “Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed”, Wiley–VCH (2003).
3) Y. Aharonov and D. Bohm: *Phys. Rev.* **115** (1959) 485–491.
4) R.P. Feynman: “Theory and Applications of Mercereau’s Superconducting Circuits”, transcript, California Institute of Technology Archives, Box 6.14 (October 29, 1964) 26–27.
5) G. Möllenstedt and W. Bayh: *Phys. BI.* **18** (1962) 299–305.
6) 江沢洋，外村彰：“君はゲージ場を見たか”，自然（1983 年 1 月号）52–63.
7) T.T. Wu and C.N. Yang: *Phys. Rev. D* **12** (1975) 3845–3857.
8) M. Peshkin and A. Tonomura: Lecture Notes in Physics **340** (Springer–Verlag, 1989).
9) 高林武彦：“量子力学の基礎をめぐって”，自然（1983 年 12 月号）44–51.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第1回

物理学の縦糸と横糸

香取 眞理・中野 徹

1.1 はじめに

物理学を学びこれからさらに理解を深めたいと考えている学部生諸君，研究生活がスタートして改めて物理学の広さを痛感している大学院生，物理学は専門外なのだが最近何かと縁のある数理研究者，久しく物理学から離れてはいるが興味を持ち続けている社会人の方々 …，本誌の読者は実に様々であろうが，物理学に接した者に共通の疑問がある．**物理学とはなんだろうか**．これは 1965 年にノーベル物理学賞を受賞した朝永振一郎の最晩年の著作のタイトルそのものであり[1]，アインシュタインとインフェルトの名著のメインテーマである[2]．

力学，電磁気学，熱力学，量子力学，統計力学．物理学の基礎科目を一通り勉強したとしよう．期末テストも無事にパスし，単位もとれた．そこで，少し余裕をもって学んできたことを復習してみたい．そのときに，また再び，力学，電磁気学，… と科目ごとに見直すのではなく，テーマごとに見直してみたらどうか．例えば，「物理学では**状態**とは何を意味し，それはどのように定まるのであろうか」，そんなテーマを課して少し復習してみよう．

ニュートンの運動方程式は物体の運動状態を定める．電場や磁場は真空がとり得る様々な状態を表している．熱力学での状態方程式は物質の温度と圧力と密度との間の関係式である．波動関数は量子状態の一つの表現である．熱平衡状態とは系がギブス分布にあることを意味する．状態という一つの言葉の意味が，科目ごとに大きく変化していることに，すぐに気づくことであろう．それでは，状態という言葉は物理では曖昧（vague）に使われているのかと言うと，決してそんなことはない．それぞれの科目（分野）ごとに，きちんと定義されている物理用語である．それならば，この用語は両義的（ambiguous），あるいは多義的であるということであろうか[3]．古典力学でいう状態と量子力学でいう状態と，熱力学でいう状態と統計力学でいう状態とは，どれも「同音異義語」であるということか．いいや，そうではない．これらはどれも，我々が理解したいと思っている物の状態を指す用語である．ただ捉えている側面が異なり，相補的に使われているのである．面白いことは，ここで「物の」とは述べたが，この「物」という言葉は物体という限定された意味ではなく，これを「自然」とか「宇宙」とかに置き換えてもよいということである．状態という一つの物理用語をテーマに据えて復習をしたとすると，ここに至り，物理学の対象である「物」という概念が謎めいてきて，その本質論に迫る必要性を感じることになるのである．「物の理（ことわり）」の研究．まさにこれが物理学という学問である．

力学，電磁気学，熱力学，量子力学，統計力学を物理学の縦糸としよう．この連載では，毎回一つずつテーマを設定して，それを横糸として物理学という一つの美しい織物をつくっていきたい．各

テーマを多角的に扱えるようにするため，**例題解答形式をとることにした．もちろんこれは，大学院入試対策を考えている読者も配慮してのことである．**縦糸を一通り学んだ学生の物理に対する理解度を見るのに，綺麗に横糸を張ることができるかどうか問うてみるのは，我々出題者の常套である．しかしそれだけがこの連載の目的ではない．回を重ねるにつれ，**物理学の考え方の普遍性を伝える**ことができれば幸いと考える．冒頭に述べた様々な読者に，我々が持つ共通の疑問に答えるためのヒントを示したことになるからである．

1.2 ラプラシアン

さっそく，古典力学でいう状態と量子力学でいう状態との間の対応関係について話を始めようと思ったが，それは次回にすることにした．今回は初回なので，テーマを少し軽いものにして，まずは本連載の形式を紹介しようと思う．そのあと，連載を読む上での注意点を述べておきたい．

今回のテーマは**ラプラシアン**である．これは微分演算子であり Δ で表すが，空間の次元によってそれぞれ

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 1\text{ 次元} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\text{ 次元} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} & 3\text{ 次元} \end{cases}$$

を表す．一般に,「場にラプラシアンを演算したものが常に零である」という方程式を**ラプラス方程式**と言う．これに対して，方程式に場を生み出す源を表す項も含まれている場合は，**ポアッソン方程式**と呼ぶ．これは，場を生み出す源が時間的に変動する場合には**波動方程式**となる．かくして，ラプラシアンは物理の様々な方程式で現れることになる．電磁気での静電ポテンシャルに対するポアッソン方程式，電磁波の伝播の方程式，量子力学でのシュレーディンガー方程式，拡散方程式，あるいは重力場の方程式，相転移の秩序パラメターを記述するギンツブルグ・ランダウ方程式，流体のナビエ・ストークス方程式など例はいくらでもある．

物理学の各科目や分野においてこれらの方程式を解き，その結果の物理的な意味を考えるのは，縦糸に沿った見方である．それらはラプラシアンという横糸で結ばれていることになる．

1.3 ラプラス方程式とポアッソン方程式

1 変数関数 $f(x)$ に対して 1 次元のラプラシアンを演算させる．このときは $\Delta f(x)$ は単に 2 階の微係数ということなので，点 x でその値が正なら関数 $f(x)$ は下に凸であり，負ならば上に凸であるということになる．このことを，空間を離散化して考え直してみよう．1 次元空間を間隔 h で離散化すると，ラプラシアン Δ は次の Δ_h となる．

$$\Delta_h f(x) = \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} - f(x)\right].$$

右辺の括弧の中の第 1 項を $\overline{f(x)}$ と書くことにすると，これは点 x の周辺（前後）での関数の値の平均値である．図 1.1 を見てほしい．関数 $f(x)$ が下に凸というのは，この平均値 $\overline{f(x)}$ が $f(x)$ よりも大きいということであり，上に凸というのは，平均値のほうが小さいということである．つまり，ラプラシアン $\Delta f(x)$ は，各点 x での関数の値 $f(x)$ の**局所的な平均値からのずれ**を表すのである．

2 次元，3 次元においても同様である．2 次元なら前後左右の近傍での平均値からのずれになるし，3 次元なら前後左右上下の近傍での平均値からのずれということになる．

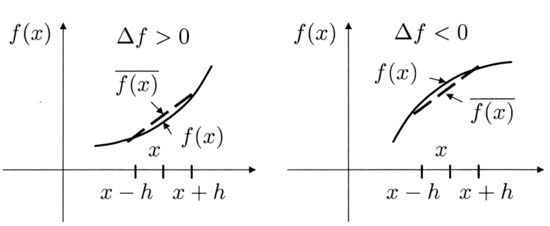


図 1.1　関数 $f(x)$ のラプラシアンの模式図．

こう考えると，**ラプラス方程式**

$$\Delta\varphi = 0$$

の意味が明らかになる．考えている空間の各点での値が，常にその周りでの局所的な平均値と一致しているということである．周りから飛びぬけているところもないし，周囲から取り残されているところもない．皆が周りに合わせて行動して調和がとれているというわけで，これがラプラス方程式を満たす関数を**調和関数**と呼ぶ所以である．

調和関数 φ は，物理の問題ではポテンシャルを表す．電荷のない空間での静電ポテンシャル，非圧縮完全流体の渦なし流れの速度ポテンシャル，物質がない空間での重力ポテンシャルなどである．このポテンシャルの勾配がそれぞれの場合に電場，速度場，あるいは重力場を与える．ポテンシャルが空間的にどのように広がっているか，あるいは系がどのような空間的対称性をもっているかによって，解くべきラプラス方程式の**次元**が定められる．そして，考えている空間領域の境界上での条件（**境界条件**）を満たすように，ポテンシャルが決められるのである．

2 次元空間は平面であるから，複素平面と等価である．このことから，2 次元空間での物理の問題は，**複素関数**の問題と深く関連することになる．

> **問題 1.1**　正則な複素関数の実部 φ と虚部 ψ は，ともに調和関数であることを示しなさい．

解答　x, y を実数として，複素数を $z = x + iy$ と表す．複素関数 $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ が，複素平面上の点 z で**微分可能**であるとは，その点での任意の方向微分が等しいということである．そして，ある開集合 D 内のすべての点で微分可能なとき，$f(x)$ はこの開集合 D で**正則**であるという．複素関数の正則条件は**コーシー・リーマン方程式**

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

を満たすことである[4)]．この最初の式を x で偏微分したものに，第 2 の式を y で偏微分したものをたすと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = 0$$

となり，ラプラス方程式が導かれる．したがって，φ はラプラス方程式の解であり，調和関数である．虚部の ψ についても同様である．■

次の関数 f は原点を除いた領域で正則である．

$$f = -E_0\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{1.1}$$

ただし，E_0 は実定数とする．この関数の実部は

$$\varphi = -E_0\left(x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) \tag{1.2}$$

である．この式からすぐに，無限遠方 ($r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$) では $\varphi = -E_0 x$ であり，単位円周上 $x^2 + y^2 = 1$ では $\varphi = 0$ であることが分かる．つまり (1.2) 式で与えられる φ は，ある境界条件を無限遠点と単位円周上で満たす 2 次元ラプラス方程式の解であるということが結論される．これは，接地した半径が 1 の導体円盤が一様な電場 $\boldsymbol{E} = (E_0, 0)$ の中にあるときの，円盤外側での静電ポテンシャルに他ならない．

平面上を速度 U_0 で一様に流れる非圧縮完全流体を考える．この中に，原点を中心にして半径 1 の円盤をおく．するとその周りで流れは乱されることになる．$z = x + iy$ として

$$w = U_0\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{1.3}$$

とする．この正則関数の実部 $\varphi(x, y)$ は，円盤の周りの流速 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ に対するポテンシャルになっている：$\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$．また，虚部 $\psi(x, y) =$ 一定は流線を与える．(1.3) 式は航空機の翼の形を調べるのに用いられる**ジューコフスキー変換**の一つであるが，(1.1) 式の f と同じ形である．符号が微妙に違っているのは，円周上の境界条件が電場と流体とでは物理的に違うためである．

では，静電ポテンシャルや重力ポテンシャルがどうして生じたのかと言えば，それはもちろん，それらを生み出す源があったからである．この源を

表す項を含んだ式が**ポアッソン方程式**である：

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_\mathrm{e}}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}, \quad \Delta\phi = 4\pi G\rho. \tag{1.4}$$

ここで $\rho_\mathrm{e}, \boldsymbol{J}, \rho$ はそれぞれ電荷密度，電流密度，物質密度を表す．左辺はポテンシャルという**場**（フィールド），右辺は**物質**（マター）という綺麗な対構造を成している．この両者を結合するのが，真空の誘電率 ε_0，真空の透磁率 μ_0，重力定数 G といった**物理定数**である．（量子統計的に言うと，電磁場は光子というボソンの集まりであり，電荷分布や電流は電子というフェルミオンの集団で作られる．他方，物質を作っている核子は陽子や中性子というフェルミオンである．重力の量子もボソンであるべしということであろうか．）

> **問題 1.2**　原点に点電荷 q があるときの静電ポテンシャルを求め，次元性を議論しなさい．

解答　空間次元を d とする．$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ として，ディラックのデルタ関数を δ で表すことにすると，この問題は (1.4) の最初の式を $\rho_\mathrm{e} = q\delta(\boldsymbol{r}) = q\prod_{j=1}^d \delta(x_j)$ として解けばよい．系は原点を中心として球対称であるから，求めるポテンシャル φ は原点からの距離 $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$ だけの関数である：$\varphi = \varphi(r)$．$r > 0$ では $\rho_\mathrm{e} = 0$ なので，方程式はラプラス方程式であり，球対称性から

$$\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{d-1}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \tag{1.5}$$

となる．つまり $r^{d-1}\partial\varphi/\partial r =$ 一定ということなので，r について 1 回積分すると，$d \geq 3$ のとき

$$\varphi = \frac{C}{r^{d-2}} \tag{1.6}$$

が得られる．積分定数（未定定数）C を決めるには，ポアッソン方程式の右辺，つまり原点にある源の情報を使わなければならない．ポアッソン方程式（(1.4) の最初の式）の両辺を，原点を中心にした半径 R の球 $\mathrm{V}(R)$ 内で積分する：

$$\int_{\mathrm{V}(R)} \Delta\varphi d\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{V}(R)} \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} d\boldsymbol{r}.$$

ρ_e は点電荷を表すディラックのデルタ関数の積だったので，(右辺)$= -q/\varepsilon_0$．左辺の積分は，$\Delta\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi$ としてガウスの定理を用いると表面積分に換えられる．解くべき方程式は

$$\int_{\mathrm{S}(R)} \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{a} = -\frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.7}$$

となる．ただし，$\mathrm{S}(R)$ は半径 R の球 $\mathrm{V}(R)$ の表面を表し，$d\boldsymbol{a}$ はその上での面素ベクトル（外向き単位法線ベクトル）である．(1.6) 式の結果より，$\nabla\varphi = C(2-d)r^{1-d}(\boldsymbol{r}/r)$ であるから，$\nabla\varphi$ は $d\boldsymbol{a}$ と平行である．d 次元の単位球の表面積を S_d と書くと，(1.7) 式より

$$S_d R^{d-1} C(2-d) R^{1-d} = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$\Rightarrow C = \frac{q}{(d-2)S_d\varepsilon_0}.$$

したがって，

$$\varphi(r) = \frac{1}{(d-2)S_d\varepsilon_0}\frac{q}{r^{d-2}}, \quad d \geq 3 \tag{1.8}$$

と求められる．2 次元 $d = 2$ では，(1.6) 式の代わりに $\varphi = C\log r$ となる．上と同様にガウスの定理を用いると，定数は $C = -q/(2\pi\varepsilon_0)$ と定まり，

$$\varphi(r) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\log r, \quad d = 2 \tag{1.9}$$

と求められる．■

注　ガンマ関数を $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s}s^{z-1}ds$ と定義すると，$S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ で与えられる．$\Gamma(1) = 1, \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2, \Gamma(2) = 1, \cdots$ なので，$S_2 = 2\pi, S_3 = 4\pi, S_4 = 2\pi^2, \cdots$ である．

1.4 波動方程式，拡散方程式，シュレーディンガー方程式

ポアッソン方程式の源の項が時間的に変動する場合は，方程式はどのような変更を受けるのであろうか．源が変化すれば，それに応じてポテンシャルも変化するはずであるが，その変化が起こる時

間は場所によるはずである．源に近い位置でのポテンシャルは，源が変動すればすぐに変動するであろうが，遠く離れた位置でのポテンシャルの変動には，必ず**時間的な遅れ**が生じるはずである．変動の伝播速度が一定であり，光速 c で与えられるものとする．このとき，ポアッソン方程式 (1.4) はそれぞれ

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi &= -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0},\\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} &= -\mu_0\boldsymbol{J},\\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi &= 4\pi G\rho\end{aligned} \tag{1.10}$$

となる．これらの式は**波動方程式**と呼ばれる．この最初の式で，源は原点だけにあると仮定してみよう．簡単化して 1 次元系を考えると，原点以外では

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0$$

という方程式になる．任意の 2 回微分可能な関数 f と g を用いて，この方程式の解は，$\varphi(x) = f(x-ct) + g(x+ct)$ で与えられる．$f(x-ct)$ の項は変動が正の向きに光速 c で伝播する様子を表し，$g(x+ct)$ の項は負の向きに伝播する様子を表している．もしも光速 $c=\infty$ なら，(1.10) 式の左辺第 2 項は零となり，方程式はポアッソン方程式 (1.4) に戻ってしまう．波動方程式の本質は，源の時間変動ではなく，それが伝播する速度が有限で一定であるということなのである．

それでは変動はいつもある速度をもって伝わるかというとそんなこともない．水にインクを垂らしたあとのインクの分子の広がり，金属板の一端を熱したときの熱の伝導 …，これらは**拡散方程式**あるいは**熱（伝導）方程式**と呼ばれる方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = D\Delta u$$

に従う．変動の広がる幅は $\sqrt{2Dt}$ である．$t \gg 1$ では $\sqrt{t} \ll t$ であり，拡散は伝播に比べてゆっくりである．D を**拡散係数**と呼ぶ．この右辺に，源の項 ρ を加えて式変形すると，

$$\left(\Delta - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = -\frac{\rho}{D} \tag{1.11}$$

を得る．

さて，量子力学のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

は波動方程式とも呼ばれる．ここで m は粒子の質量であり，V はポテンシャル・エネルギーである．しかしこれは

$$\left(\Delta + i\frac{2m}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = \frac{2m}{\hbar^2}V\Psi \tag{1.12}$$

と書き直せるので，時間についても空間についても 2 階微分である通常の波動方程式 (1.10) よりは，むしろ拡散方程式 (1.11) に似ている．ただし，量子的な拡散係数は

$$D_{\text{量子}} = i\frac{\hbar}{2m} \tag{1.13}$$

となる．**ハイゼンベルクの不確定性原理**によって粒子の位置は不確定であり常に揺らいでいる．その揺らぎの大きさは $\hbar$ に比例する．また，軽い原子ほど量子効果は大きく，そのため水素原子は金属中にも浸み込み，その中を拡散することができる．拡散係数が $\hbar$ に比例し，粒子の質量 m に反比例するという (1.13) 式は物理的に正しそうである．しかし，虚数単位 i がかかっているのはどうしたことか．拡散係数が純虚数であるとは，まったくもって物理的ではない！ これはどう考えたらよいのであろうか？

唯一つ，明らかに正しいことがある．波動方程式 (1.10)，拡散方程式 (1.11)，シュレーディンガー方程式 (1.12) に共通して，不動の位置を占めている項があるということである．それがラプラシアンの項なのである．

1.5 本連載を読む上での注意点

冒頭に述べたような読者の多様性を鑑み，本連載はいろいろな読み方ができるように工夫するつもりである．**大学院受験を考えている読者は，ぜ**

び鉛筆を片手にして計算をフォローしながら読み進めてほしい．例えば，問題 1.2 の解答はかなり詳しく書いてあるように見えるかもしれないが，実はスキップも多い．球対称な場合，ラプラシアンが座標の動径成分 r を用いて (1.5) 式のように表せるというのをどうやったら導けるだろうか．また，その後に書いた注の内容を確認するのは，物理数学の良い練習問題であろう．次回以降，特に量子力学の話題のときには，エルミート多項式などの特殊関数がしばしば登場することになる．しかし，どうか数学的な知識でつまずかないでほしい．必要な公式はかならず標準的な教科書に載っているはずである[5)]．とにかくどんどん使ってみよう．

本連載で示した解答は，あくまで物理を議論するためのヒントである．そこに書かれていることに留まらず，さらにいろいろと考えを広げていってもらいたい．また，問題 1.2 を例にしてみよう．例えば，$d \geq 3$ の場合として書いた (1.8) 式で，$r^{-(d-2)} = e^{-(d-2)\log r}$ などとして，$d-2$ についてローラン展開してみると

$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d-2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\log\pi + \gamma) - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\log r + \mathcal{O}(d-2) \qquad (1.14)$$

となる．(γ はオイラーの定数，$\gamma = 0.57721\cdots$.) $d \to 2$ で第 1 項は発散するが，第 2 項と同様に r には依らない．ポテンシャル（エネルギー）はどこを基準にして測ってもよいはずなので，この 2 つの項の和が零となるように基準点をとり直すことにする．$\mathcal{O}(d-2)$ は $d \to 2$ で零になる項を表すので，ポテンシャルの r 依存性は $d \to 2$ の極限では (1.14) 式の右辺第 3 項で表されることになる．これは (1.9) 式に他ならない．それでは $d = 1$ の場合はどうか？ $d \to 2$ という極限を考えたが，次元数 d は自然数でなくてもよいのだろうか．フラクタル次元という言葉を聞いたことがあるが，それと関係があるのかもしれない．横糸が延び過ぎたら，フラクタル物理という新たな縦糸を張ることも考えてみてはどうか．

参考文献

1) 朝永振一郎：『物理学とはなんだろうか，上，下』，岩波新書，岩波書店 (1979).
2) アインシュタイン，インフェルト，（石原純訳）：『物理学はいかに創られたか，上，下』，岩波新書，岩波書店 (1939/40).
3) 大江健三郎：『あいまいな日本の私』，岩波新書，岩波書店 (1995).
4) 松下貢：『物理数学』，裳華房 (1999).
5) 例えば，次の教科書シリーズをあげておく．新・数理科学ライブラリ［物理学］，サイエンス社.

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



科学者の錯覚

美宅　成樹

講義の途中で，私はよく雑談をする．講義の本来の内容は，本をしっかり読めば，教室に来なくても理解することができる．しかし，雑談はその場限りで，教室に来ないと聞けない話である．学生にも，講義の雑談が大事なのだよと冗談半分に言う．そうした雑談の類であるが，図１のようなヘビの絵を黒板に描いておいて，次のような疑問を投げてみることがある．

「ヘビの心臓はどこにあると思う？」

最近の学生は自分から答えてくれないので，こちらから個別の学生に答えを要求すると，いくつかの答えが出る．図１の文字は大体出てくる答えの位置である．Ａは頭，Ｂは前から 1/4 くらいのところ（胸？），Ｃはちょうど真ん中（腹？），Ｄは一番後ろ（尾）である．それで学生に投票をさせてみると，Ｄが不人気である以外は，いずれも複数の賛同者がいる．問題が単純なので，棄権はまずない．

学生が乗ってきたところで，私が答えを述べる．

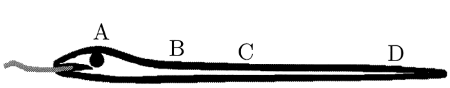


図１　ヘビ．

「ヘビにも色々あって，ＡもＢもＣも正解である.」学生は，やられたという顔をするか，どういうこと？ という怪訝な顔をする．実際，ヘビにも色々とあって，頭に心臓があるタイプ，胸のところに心臓があるタイプ，真ん中に心臓を持つタイプが存在している．草原のヘビ，樹上のヘビ，ウミヘビがそれぞれのタイプであると言えば，聡明な読者にはどれがどのタイプかということと，その理由がお分かりと思う．ポイントは，ヘビが貧血を起こさないようするには，心臓がどこにあるのが良いかということである．

さてここで，この文章のタイトルについて，述べたいと思う．上の問題を科学者にも出してみる．そうすると，答えの傾向と正解に対する反応は，学生と全く同じである．科学者も人間である．錯覚というか，偏見に陥ってしまうことは，避けられないのである．ＡかＢかという問題を投げられたときに，科学者を含めて多くの人は，答えとしてついＡかＢかだけを考えてしまう．これは錯覚・偏見に他ならない．ＡかＢかという問題には，ＡもＢも正しいという答えと，ＡもＢも正しくないという答えが常にあり得るのだが，これら２つの答えはつい忘れがちになってしまうのである．私たち人間の脳の働きに，何か早く答えを出そうとする構造があり，この錯覚に陥りやすいのではない

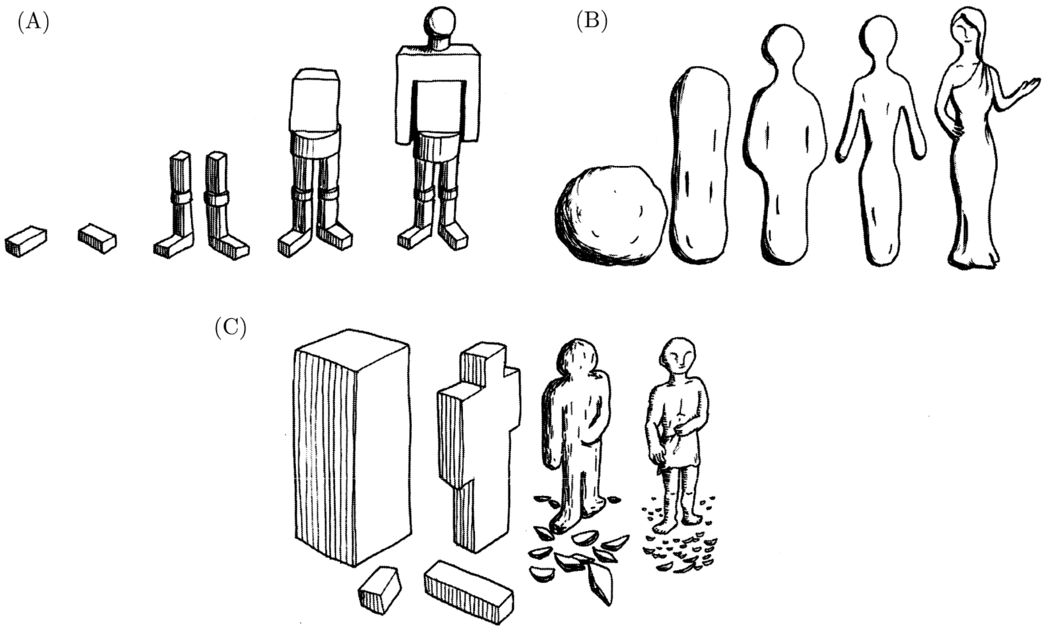


図2　ものの形作りの3方式：積み木方式（A），粘土細工方式（B），彫刻方式（C）（絵：美宅玲子）．

かと，私は想像している．もちろん人々が陥っている錯覚や偏見を見抜き，真実に到達する立派な科学者が多く存在していることは確かである．しかし，すべての科学者が錯覚や偏見に陥っていないと思ったら，それは大いなる間違いである．そして，この種の錯覚や偏見の厄介なところは，現象をどのように見るかというもっとも初めの段階で錯覚に陥ってしまうと，どれだけすばらしい手法を用いても真実に到達しようがないという点である．

1. 生物の形作りの問題

生物は色々な姿・形をしている．それらはどのようにして作られているのだろうか．まず，より一般的に形作りを考えてみよう．材料から形を作るのには，積み木方式，粘土細工方式，彫刻方式，流し込み方式，水引方式など色々と考えられるが，多くは最初の3つのいずれかに分類できるように思われる．図2は，その3つの方法のイメージである．

第1の積み木方式（図2(A)）では，最初簡単な形のブロックをたくさん作っておいて，それを積み上げていく．四角のレンガを積み上げる建物，日本建築の屋根に使われる瓦，お城の石垣など，この方式の構造物はたくさんある．子供のおもちゃでも積み木方式のブロックは人気である．小さなブロックを結合するために，突起とそれにちょうど合う凹みがあって，それを利用すると非常に大きなロボットや飛行機のモデルなどを作ることができる．ジグソーパズルも積み木方式であるが，そのブロック（この場合はピース）の形がすべて異なっているところに特徴がある．

第2の粘土細工方式（図2(B)）では，粘土のような柔らかいが塑性のある材料を圧したり，曲げたり，ひねったりして形を作っていく．代表的な粘土細工は陶磁器作りである．くるくる回るろくろの上に粘土のかたまりを乗せ，指で力を加えていくと，生きもののように形が変わっていく．熟練の技だが，見事なものである．ろくろを使うのは，回転対称のある形の茶碗を作るためである．もちろん対称性のない像（塑像）などもこの方式で作ることができる．硬い金属でも，板金を打ち出すことによって色々な形ができるが，これも形の作り方としては粘土細工方式と言えるだろう．

第３の彫刻方式（図２(C)）では，かたまりから不要の部分を削り出して形を作る．木や石のような硬い材料では，粘土細工のように形をひねり出すことは難しく，この彫刻方式が用いられている．ただし，粘土のかたまりのように柔らかい材料でも彫刻方式は可能である．例えば陶磁器でも，台に当たる高台は彫刻方式で掘り出している．粘土細工方式で大まかに形を作り，彫刻方式で細かいところを細工すると，比較的容易に複雑なものを作ることができるのである．一般に彫刻方式では細かい形を作り出すことができるが，やり直しがきかない．木材を前に，「中の仏像が見えるので，それを掘り出すだけなのです．」というような仏師の言葉を見聞きしたことがあるが，どこを削り出すかが，彫刻方式のポイントなのである．

一般論はこのくらいとして，問題は生物の姿・形作りである．人間（生物）はどのような方式でできているのだろうか？ 人と似た形をした仏像では，彫刻方式でできたもの，粘土細工方式のもの，積み木方式のものなど色々な方式で作られている．しかし，直感的に考えて，現実の私たちの体が削り出されたものとは思われない．ひねり出されたものというのも，無理がある．ロボットは色々な部分が組み合わされていて，積み木方式と言える．人の体でも器官が積み重なっているので，積み木方式のようにも見えるが，どうもそれだけではなさそうである．私の知る限り，人も象もネズミもハエもミミズも，その形作りは彫刻方式，粘土細工方式，積み木方式の単独の方式で作られたものではなく，ここで述べた３つの方式をうまく組み合わせてできているのである．

生物の体は，細胞でできている．人の体の場合は，60兆ほどの細胞でできていて，細胞というブロックを使った積み木方式によると，言うことができる．しかも，細胞というブロックは場所によって形や性質が違っているという意味で，一種のジグソーパズルとなっている．ただ生物の体が単に積み木方式というだけのものでないことは明らかである．

私たちの体を考えてみると，最初は卵子と精子が受精した受精卵という１個の細胞から始まり，それが60兆の細胞の体になる．その途中には色々な物質や細胞の移動が起こる．細胞が分裂して，2個，4個，8個，……と数を増やしていく．そのうちに球状だったかたまりに凹みができ，多くの細胞がその凹みに落ち込んでいく．最後にはその凹みは管となって閉じて後の神経や脊椎になる．細胞が移動し，お互いの位置関係を適切に変化させていくプロセスは，あたかも精巧な粘土細工のようである．

その後，やはり粘土細工のように腕や足ができていくが，その先に手ができ，指ができる．しかし，最後の指まで粘土細工方式でできているわけではない．まず，手全体がかたまりとしてできた後，指と指の間の細胞が死んでいくことによって，5本の指が残るのである．まさに彫刻方式の形作りが起こるのである．すべての細胞には，自ら死ぬしくみ（アポトーシス）を持っている．突然細胞が死ぬと，その中にあった物質が細胞間に放り出され，それが周りの細胞に大きな影響を与える．しかし，アポトーシスでは周りに影響を与えないように，内部を消化しつつ一定のプロセスで死んでいく．実に巧妙な彫刻方式である．

生物は，細胞をブロックとした積み木方式で形を作りつつ，全体の形は粘土細工方式のようにできるが，細かいところはアポトーシスによる彫刻方式で作られるのである．そして，この巧妙なプロセスの手続きが多くの遺伝子で指定されている．生物の形は一つの方式でできているわけではなく，いくつかの方式を組み合わせて作っているということを知って，もう一度ヘビの心臓の話を思い出していただきたい．AかBかという疑問に対しては，一般にAもBも正しいという答えがあり得るのだが，どうも生物に関連する色々な問題では，複数の答えがすべて正しいということが多いように思われるのである．

2. タンパク質の形の問題

私はタンパク質の姿・形や機能・働きについて興味を持ち，研究を行っている．問題自体は単純

なので，まずそれについて説明しよう．タンパク質は色々な分子を合成したり，分解したり，細胞内外で物質を輸送したり，情報を伝達したりする．また，体の形を保つ腱や靭帯，動くための筋肉などもタンパク質でできている．タンパク質には多くの種類があるが，すべて体の働きを担う分子機械ということができる．そして，分子機械としてのタンパク質は，その働きに合った姿・形をしている．例えば，膜を通して小さい分子を通すタンパク質（輸送タンパク質）は真ん中に穴を持っていたり，反応を助けるタンパク質は反応する分子をくっつける場所を用意したりしている．

一方，タンパク質はアミノ酸という分子がつながった高分子である．タンパク質を構成しているアミノ酸には20種類のものがあり，それらがどのようにつながっているかによって，タンパク質の姿・形や働きが決まっている．つまり，1次元的なアミノ酸の配列が設計図となって，立体構造を持ったタンパク質という分子機械ができているのである．そこで自然に生まれる問題は，「1次元的なアミノ酸の配列の仕方が，どのようにして3次元的な姿・形や働きを形成するのだろうか？」

この疑問に対して，物理的にストレートに答えを与えることは実はまだできていない（物理の問題としてアミノ酸配列から立体構造を予測できない）．タンパク質は数十個～数千個のアミノ酸がつながった分子だが，こういうヒモ状の分子は膨大な自由度を持っていて，最終的な立体構造を決める因子が単純な形で見つからないのである．しかし，問題をさらに分解したときに，それらの小さな問題では割合簡単に答えが出せるかもしれない．その代表的な問題が二次構造予測の問題である．タンパク質の立体構造を見てみると，構造が階層的にできていることが分かる．図3のタンパク質（ミオグロビン）の場合は，α ヘリックス構造が数本あり，それらが折りたたまって立体構造ができている．そして，別の分子（ヘム）を抱え込んでいる．このようにタンパク質は，α ヘリックス等の局所構造がさらにある一定の位置関係を持つことによって立体構造ができているのである．この

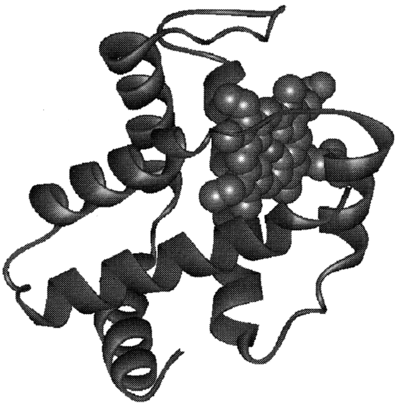


図3　タンパク質（ミオグロビン）は二次構造が折りたたまってできている．

局所構造を二次構造と呼んでいる．そして，アミノ酸の配列から二次構造（α ヘリックス，β シート等）を予測するのが，タンパク質の二次構造予測の問題なのである．

この問題は当然物理の問題であるはずである．実際に二次構造を構成しているアミノ酸，周りのアミノ酸，水など多くの分子との相互作用によって二次構造が決まっているはずなので，これは分子の挙動を決める物理の問題なのである．そこでいくつかのアプローチが考えられている．原子どうしの相互作用をすべて考慮して安定状態を求めるというのが物理的にはもっとも妥当なアプローチである．10～20アミノ酸程度の小さなアミノ酸配列の場合は，このアプローチで二次構造の予測が可能と言われている．しかし，大きなタンパク質の中での二次構造予測は，このアプローチでは事実上不可能である．コンピュータの能力が問題の計算量に追いつかないからである．それで多く行われているのは，経験的なアプローチである．すでに立体構造が分かっているタンパク質のアミノ酸配列と二次構造の関係をデータベース化し，それを利用して経験的に予測するのである．最近は多くの立体構造のデータベースがあるので，かなりの予測が可能になっているようだが，物理的理解にはつながらない手法である．

私たちはこれに対して少し異なるアプローチを取っている．「二次構造形成」の問題は「ヘビの心



図4　病床で描いた絵：子供たちの肖像画（左），自画像（右）．

臓」の話と似ているのである．つまり，例えば α ヘリックスという二次構造は，構造的には一つなのだが，その二次構造を形成する原因（力のバランス）としては全く異なるいくつかのものが存在している．そして，このことをはっきり意識して分類・予測を行うと高精度の予測が可能となる．

α ヘリックス構造は，その存在する環境によって特徴が全く異なるアミノ酸配列を持っている．一つの典型的な例が細胞内に埋め込まれた膜タンパク質の α ヘリックスである．これに対して，水の中で大きく伸びた構造を持つ水溶性タンパク質では，四方を水に取り囲まれた α ヘリックスが存在しており，それは膜タンパク質の中の α ヘリックスとは対照的な性質を持っているのである．細胞膜の内部は水がない疎水性の環境になっているので，膜貫通ヘリックスはその環境に合わせて，非常に疎水的なアミノ酸が並んでいることが多い．これに対して，大きく伸びた構造の水溶性タンパク質（カルモジュリンなど）の α ヘリックスでは，水という環境に合わせて多くの電荷を持ったアミノ酸や極性の高いアミノ酸が並んでいる．それらは構造的には全く同じ α ヘリックス構造なのだが，アミノ酸の配列から見ると似ても似つかないものとなってしまうのである．

これはある意味で当然で，α ヘリックスにも色々あるのである．そうだとすれば，アミノ酸配列を見たときに，それが α ヘリックスかどうかではなく，どんな種類の α ヘリックスとなっているかという疑問を投げなければならないのである．私たちは，膜タンパク質の α ヘリックス予測では95%を越える精度を達成しており，伸びた水溶性タンパク質（カルモジュリンのタイプ）の α ヘリックスもほとんどつかまえることに成功している[1]．まだ球状タンパク質の中の二次構造に対する高精度な予測には成功していないが，問題に対するアプローチとしては正しいと考えている．

ここで述べたように，錯覚に気が付けば，誰でもできる問題はたくさんあると思うし，それによって興味深い研究を展開することができる．しかし，私自身，このことを若いときから気が付いていたわけではない．30歳代の半ばに私は突然大きな病気に見舞われたが，この病気の経験が研究上の考え方にも大きな影響を与えていて，ある程度錯覚から逃れることができるようになったと思う．冬のある日，まだ辺りが暗い頃（おそらく5時前）に頸が痛くて目を覚ました．夜中に目を覚ますことは良くあることなのだが，このときは奇妙な感覚に襲われた．頭の中に言葉が何もないのである．この感覚はおそらく経験をしたことがある人でないと分からないのではないだろうか．私たちは，何もしゃべらなくても，考えるときには言葉を使っている．しかし，その時は頭の中の言葉が全く浮かんでこないのである．結論を言うと，脳梗塞の発作から来る（感覚性）失語症になってしまったのである．回復しこのように文章を書けるようになったのは大変幸運だったのだが，それには長い時間とリハビリのための大きな努力を要した．そして，この経験が私の人生および研究のスタイル

に対して大きなギアチェンジとなった．

最大のギアチェンジは，「研究を含めて自分がやっていることは，すべて脳の働きを通して行っている」ということを，身をもって本当に理解したという点にある．脳の小さな領域が壊れるだけで言葉がなくなるということは，客観的なことを語っていてもそれは自分の脳を通して語っているということを示している．しかし，自分の脳というのは，生物の進化の結果としてできたものであって，大きな限界をはらんだ装置である．実に良くできているとはいえ，いろいろな錯覚を免れないということはすでに分かっているのである．そして，タンパク質の問題を考えるときも，多くの錯覚によって理解が阻まれているのではないかと考えるようになった．ここでは主に「単一メカニズムの錯覚」について述べた．錯覚は他にもたくさんある．自分の中にある錯覚のベールを一枚ずつはがしていく作業が研究であるとさえ最近は思われるのである．

図4は失語症になってまだ日が浅い時期に自分の脳にあるイメージの領域がどのくらい健全かということを調べるためにクレヨンで描いた子供たちの肖像画（左）と自画像（右）である（子供たちはすでに大きく成長し，赤ちゃんだった息子は180センチを越える大男になっている）．病床でこの絵を簡単に描くことができたことで，自分の脳のイメージの領域がしっかり生きていることを確認し，私はまだ研究を続けることができるかもしれないと，ほっとしたことを覚えている．そして，研究で最も大事な能力は，言語能力ではなくイメージ力だということに気が付いた．最後に若い人たちに2つのことをメッセージとして送りたいと思う．研究者を含め私たち人間は38億年の生物進化の産物であり，多くの錯覚・偏見からまぬがれない．そのことを意識して，勉学・研究を進めてほしい．そうすれば必ず独創性がついてくるはずである．もう1つ．私は大きな病気を乗り越えることで，それをバネに研究を大きく発展させることができたと思う．最悪の事態にも後で見るととても良い側面があることが分かる．そのことを知って，一見悪いことが起っても，ホジティブ思考で物事に当たっていただきたい．

参考文献

1）インターネットの URL: http://bp.nuap.nagoya-u.ac.jp/sosui/

（みたく・しげき，名古屋大学大学院工学研究科）

特　集（2009 年 3 月号予告）

方程式に潜む対称性

“美しさ” から探る方程式の見方

本体 952 円

特　集（2009 年 1 月号）

グラフィックでわかる物理

イメージから広がる直観的理解

本体 952 円

編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．量子力学の発展は私たちの生活にも大きな影響を与えており，さらなる進化も見込まれているようです．学問の発展には限界がないのかと改めて思い知らされます．私たちもこの限界が見えるまで追究していきたいものです．(R)

*　　*

「新しいものを理解したければ思考の構造をも変えねばならない.」量子力学の草分けを担ったハイゼンベルクの言葉です．百年近く前に先人たちが奮闘して創り上げた土台の上に，新しい量子力学が創られようとしています．本特集で，その世界像を眺めてみて下さい．(N)

数　理　科　学　2月号

2009 年 2 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所 ⓒ 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁